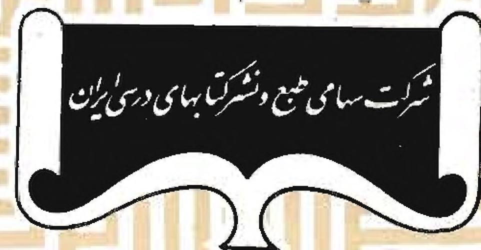
توانا بود هر که دانا بود

هندسهٔ رقومی و ترسیمی

برای سال ششم ریاضی





بها در تمام کشور ۲۱ ریال

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

هندسهٔ رقومی و ترسیمی

برای سال ششم ریاضی

چاپ و توزیع از :



۱۳۴۵



این کتاب که به وسیلهٔ آقایان موسی آذرنوش ، احمد بیرشاک ، جهانگیر شمس آوری ، عبدالغنی علیم مروستی ، پروفسور تقی‌فاطمی، دکترجمال‌عصار ، باقر نحوی، شادروان محسن‌هنربخش نگارش یافته، برطبق‌مادهٔ ۴ تصویب نامهٔ‌شمارهٔ ۹۱۸ هیئت دولت مورخ ۱۸ر۱۲ر۴۱ و مادهٔ‌یك تصویب نامهٔ‌قانونی ۴۴۸۴ مصوب ۱۸ر۳ر۴۲ ازطرف کمیسیونهای‌منتخب‌شورای‌عالی فرهنگ برای تدریس در دبیرستانها برگزیده شد و به‌موجب رأی شمارهٔ ۱۰۶۱ شورای عالی فرهنگ مورخ ۲۶ر۸ر۴۲ از نظرمطالب در سازمان کتابهای درسی ایران بررسی شد و در چاپخانهٔ فردوسی بچاپ رسید .

کتاب یکی از ارکان اصلی آموزش و پرورش در اجتماع کنونی بشری است. هر دانش‌پژوه که خواهان حل مشکل یا درک حقیقتی باشد، از مصاحبت کتاب و توسّل بدین وسیلهٔ مطمئن و مشاور مؤتمن ناگزیر است.

دانش‌آموزان با استعانت از کتاب می‌توانند به‌جهان بیکران علم دسترسی یابند و سرمایهٔ لازم برای رفاه حال خویش و تعالی جامعهٔ خود کسب کنند.

وزارت آموزش و پرورش مساعی خویش را بکار می‌برد تا برای استفادهٔ دانش‌آموزان کتابهایی عرضه کند که با پیشرفتهای علمی و فنی جهان مترقّی امروز هماهنگ و بر اساس جدیدترین اصول آموزش و پرورش تنظیم شده باشد.

نباید از نظر دور داشت که با وسعت دامنهٔ علوم در جهان امروز، هر اندازه کتب درسی جامع و کامل تهیّه شده باشد کافی برای تجهیز علمی جوانان نیست و دانش آموزان گرامی نباید مطالعات خود را به این کتب محدود سازند، بلکه باید با راهنمایی معلّمان خویش در ساعات فراغت به مطالعهٔ کتاب در کنار دروس خود بپردازند و اوقات عزیز خویش را برایگان از کف ندهند.

بر محقّقان و مؤلّفان کشور فرض است که در راه تهیّهٔ اینگونه کتابها بکوشند. بخصوص در این عصر مترقّی که به ارادهٔ شاهنشاه آریامهر و در سایهٔ انقلاب ششم بهمن ماه **۱۳۴۱** و با اجرای طرح سپاه دانش، اهالی نقاط دورافتادهٔ مملکت نیز از نعمت سواد برخوردار گردیده و هر روز بر عدهٔ افراد کتابخوان کشور افزوده می‌شود فرصت را غنیمت شمرند و به تألیف کتابهایی مفید در رشته‌های مختلف علوم و فنون با توجّه به احتیاجات علمی دانش آموزان بپردازند و ازاین راه به پیشرفت فرهنگ و علوم و رشد اقتصادی کشور خدمتی ارزنده بنمایند.

وزیر آموزش و پرورش ـ دکتر هادی هدایتی

فهرست مندرجات

لطفاً این غلطهای چاپی را تصحیح فرمایید :

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۸	۱۳	d	δ
۲۸	سمت راست شکل ۱۶	Δ	Δ_1
۴۲	۳	، مانند ،	، مانند O ،
۶۷	۵	M_5	m_5
۱۳۵	شکل ۷ بالای خطزمین	d	d'
۲۴۰	۱۵	ab_0c	ab_0c_0

بنام خدا

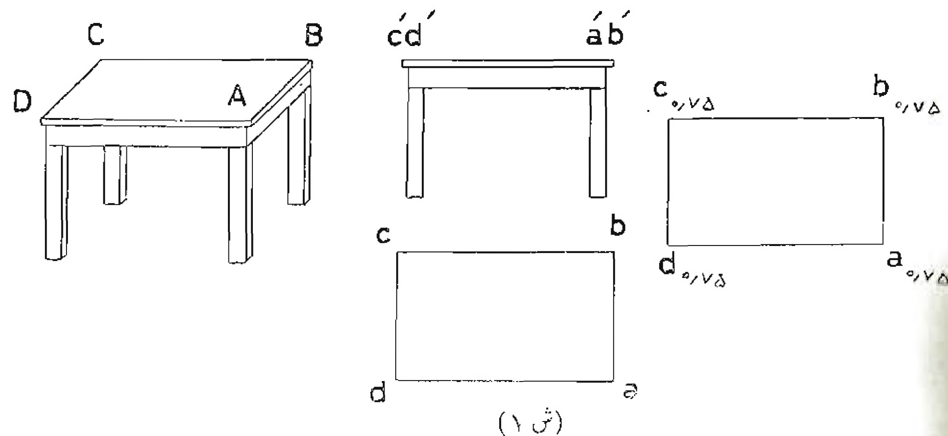
بخش اول

هندسهٔ رقومی

فصل اول

مقدمات

۱ـ انواع تصویر ـ در شکل ۱ ، سه تصویر از يك میز می‌بینید.



(ش ۱)

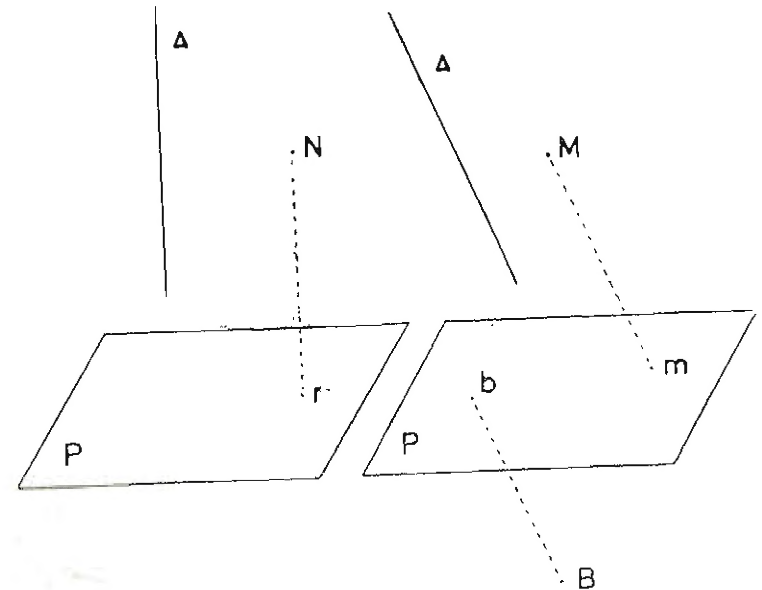
تصویر سمت چپ که نقاشی میز است ، میز را بخوبی مجسم می‌سازد . تصویروسط شبیه به تصاویری است‌که ترسیم آن را در رسم یادگرفته‌اید و میز یا هرچیز دیگر را با دو تصویر افقی و قائم ، یا با عدهٔ بیشتری تصاویر (افقی ، قائم ، نیمرخ و غیره) نمایش می‌دهد . تصویر سمت‌راست نوع خاصی تصویراست‌که موضوع بحث ما خواهد بود و معروف به‌تصویر رقومی است .

همهٔ این تصاویر ، مانند رسم فنی ، بر طبق قواعد مخصوص رسم

می‌شوند . صفحه‌ای که تصویر بر روی آن رسم می‌شود **صفحهٔ تصویر** نام دارد . تصاویر نقاشی اشیا بر طبق قواعد **تصویر مرکزی** رسم می‌شوند ؛ ما از این نوع تصویر صحبت نخواهیم کرد و به‌بحث در بارهٔ **تصویر قائم** خواهیم پرداخت .

۲- تصویر بر یك صفحه - هرگاه صفحه‌ای مانند P به نام **صفحهٔ تصویر** ، وخطی مانند Δ به نام **امتداد تصویر** داده‌شود، تصویر هر نقطه بر روی صفحهٔ P محل تلاقی این صفحه با خطی است‌که از آن نقطه به موازات امتداد تصویررسم شود. در شکل ۲ ، P صفحهٔ تصویر ، Δ امتداد تصویر ، m تصویر نقطهٔ M و b تصویر نقطهٔ B است . تصویر هر نقطه‌ای‌که در صفحهٔ تصویرباشد برخودش قرار دارد .

خطی‌که ازهر نقطه به‌موازات امتداد تصویرکشیده شود خط **مصور**



(ش ۳) (ش ۲)

آن نقطه نام دارد .

۳- تصویر قائم - هرگاه امتدادتصویر برصفحهٔ تصویرعمود باشد، تصویررا **قائم** و در غیراین صورت تصویر را **مایل** گویند .

چون عموماً تصاویر **قائم** شکلها رسم می‌شود ، ازگفتن صفت **قائم** خودداری می‌کنیم و هرجاکه صحبت از تصویرشود مرادتصویرقائم‌است . درشکل ۳ ، نقطهٔ n تصویر«قائم» N است .

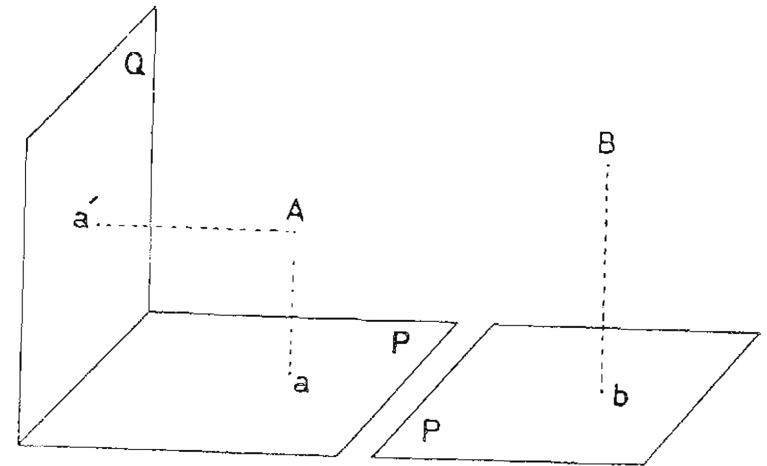
۴- چگونه می‌توان از روی تصویر نقطه، خود نقطه‌راتعیین کرد - تصاویر اشیا باید بقسمی رسم‌شوندکه از روی‌آنها بتوان خوداشیا واجزای مختلف آنهارا تعیین‌کرد؛ زیرا که تصویر، وسیلهٔ تشخیص‌ومجسم کردن شیء است .

برای هرنقطه می‌توان روی صفحهٔ تصویر ، تصویری بدست آورد و آن پای عمودی است‌که از آن نقطه ، برصفحهٔ تصویرفرودآید.

اما فقط با معلوم بودن تصویریك نقطه نمی‌توان آن نقطه را تعیین کرد . مثلا در شکل ۴ ، a فقط تصویر نقطهٔ A نیست بلکه تصویر همهٔ نقاطی است‌که بر روی Aa واقع باشند .

برای اینکه از تصویر نقطهٔ A بتوانیم به‌وضع خود نقطهٔ A پی‌ببریم باید علاوه برتصویر، عامل دیگری هم داشته باشیم؛ این عامل یا فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ تصویراست یا تصویر دیگری از نقطهٔ A برروی یك صفحهٔ دیگراست . مثلا اگر گفته شود که «b تصویر نقطه‌ای است که به‌فاصلهٔ۳ بالای صفحهٔ‌تصویر واقع است» می‌توان‌آن نقطه‌را به‌این‌طریق تعیین کرد : از b عمودی بر صفحهٔ تصویر اخراج کرده (شکل ۴ - ۱) روی‌آن ازمبداء b به‌طرف بالای صفحهٔ تصویرطولی‌مساوی ۳ جدامی‌کنیم

و به‌نقطهٔ مطلوب B می‌رسیم. یا اگر در شکل ۴ــب ، a تصویر نقطه‌ای بر صفحهٔ P و a' تصویر همان نقطه بر صفحهٔ Q باشد و بخواهیم آن نقطه را تعیین کنیم ، باید از a عمودی بر P و از a' عمودی بر Q اخراج کنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند . A تنها نقطه‌ای است که دو تصویرش a و a' هستند .



(ش ۴)

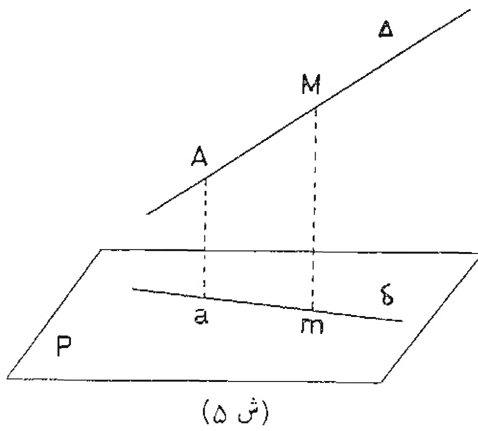
پس برای تعیین هر نقطه باید تصویر آن وفاصله‌اش ازصفحهٔ تصویر یا تصاویرش بر دو صفحه ، داده شده باشند . نوع اول را تصویر به روش هندسهٔ **رقومی** و نوع دوم را تصویر به‌روش هندسهٔ **ترسیمی** می‌گویند .

۵ ــ هندسهٔ رقومی و هندسهٔ ترسیمی ــ قسمتی از هندسه که در آن ، هر نقطه به‌وسیلهٔ تصویرش توأم با فاصله‌اش از صفحهٔ تصویر مشخص می‌شود **هندسهٔ رقومی** و قسمتی از هندسه که در آن ، هر نقطه به‌وسیلهٔ دو تصویرش بر دو صفحه مشخص می‌شود **هندسهٔ ترسیمی** نام دارد .

۶ــ تصویر یك شکل ــ تصویر یك شکل ، شکلی است که از مجموعهٔ تصاویر نقاط آن شکل حاصل شود .

۷ــ تصویر خط راست ــ قضیه ــ تصویر خط راست خطی راست است .

برهان ــ فرض می‌کنیم که a تصویر نقطه‌ای مانند A از خط Δ باشد (شکل ۵). صفحه‌ای که بر Δ و مصور نقطهٔ A می‌گذرد بر صفحهٔ P عمود است [1] و با آن فصل مشترکی مانند δ دارد [2] . اکنون ثابت می‌کنیم که δ تصویر Δ است ؛ برای این کار باید ثابت کنیم که تصویر هر نقطه از Δ بر روی δ است .



(ش ۵)

هرگاه M نقطهٔ غیرمشخصی از Δ باشد ، عمود Mm که از آن بر صفحهٔ P فرود آید در صفحه‌ای است که بر Δ و Aa مرور می‌کند . پس نقطهٔ m یعنی فصل مشترك آن عمود با صفحهٔ P روی δ است .

صفحه‌ای که بر خط Δ مرور کند وعمود بر صفحهٔ P باشد **صفحهٔ مصور** خط Δ نام دارد .

۸ــ تصویر هر خط که بر صفحهٔ تصویر عمود باشد یك نقطه است .

۹ــ هرگاه خطی با صفحهٔ تصویر موازی باشد ، با تصویرش بر صفحه

۱ــ هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد هر صفحه که بر آن خط مرور کند بر آن صفحه عمود است .

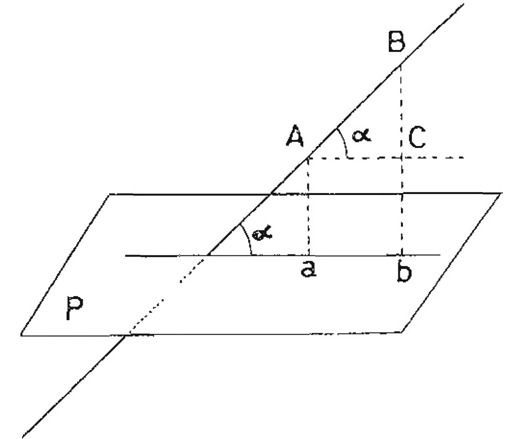
۲ــ فصل مشترك دوصفحه خطی است مستقیم .

موازی است.[1]

۱۰ـ قضیه ـ طول تصویر هر قطعه خط مساوی است با حاصل ضرب طول آن قطعه خط در کسینوس زاویهٔ بین خط و تصویر.

برهان ـ فرض می‌کنیم که ab تصویر AB باشد (شکل ۶). از A خطی موازی ab رسم می‌کنیم تا خط مصور B را در C قطع کند.

الف ـ زاویهٔ BAC مساوی زاویهٔ بین خط و تصویر آن است.



(ش ۶)

$(\widehat{BAC}=\alpha)$

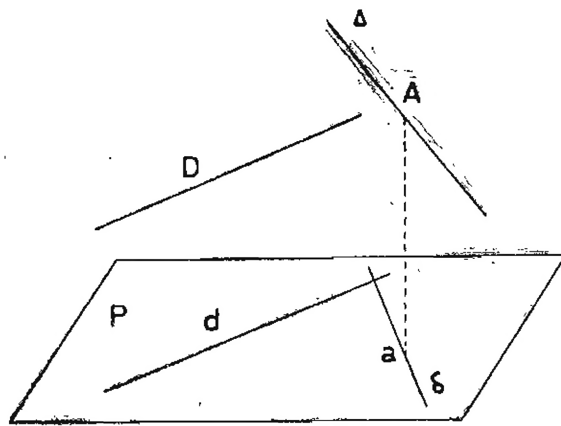
ب ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$AC=AB\cos\alpha$ و چون به‌جای AC مساویش ab را قرار دهیم خواهیم داشت: $ab=AB\cos\alpha$.

۱۱ ـ قضیه ـ هرگاه یکی از دو خط عمود برهم با صفحهٔ تصویر موازی بوده و دیگری بر صفحهٔ تصویر عمود نباشد، تصاویر آن دو خط بر یکدیگر عمودند.

۱ـ هرگاه خط Δ با صفحهٔ P موازی باشد هر صفحه که بر خط Δ بگذرد و با صفحهٔ P موازی نباشد صفحهٔ P را برفصل مشترکی موازی با Δ قطع می‌کند.

برهان ـ هرگاه Δ بر D عمود باشد و δ تصویر Δ و d تصویر D و D با صفحهٔ تصویر موازی باشد، باید ثابت کنیم که δ بر d عموداست (شکل ۷). در حقیقت D که با صفحهٔ تصویر موازی است، بر هر خطی که عمود بر صفحهٔ تصویر باشد عمود است.



(ش ۷)

بنابراین اگر Aa خط مصور یکی از نقاط Δ باشد، D بر آن عمود است.

چون D بر دو خط Δ و Aa از صفحهٔ مصور Δ عمود است، بر تمام خطوط آن صفحه و از جمله بر δ نیز عمود است؛ و چون d و D متوازیند، d بر δ عمود بوده و زاویهٔ بین δ و d قائمه است.

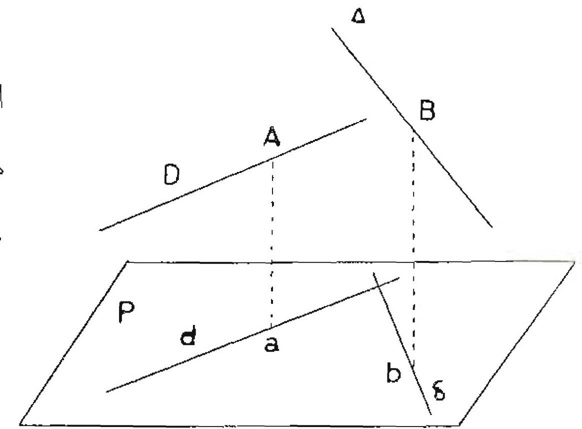
۱۲ ـ قضیه ـ اگر تصویرهای دو خط عمود بر هم بر یکدیگر عمود باشند، لااقل یکی از آن دو خط با صفحهٔ تصویر موازی است.

برهان ـ فرض می‌کنیم که Δ بر D و δ بر d عمود باشد و یکی از دو خط مثلا Δ، با صفحهٔ P، یعنی با تصویرش δ، موازی نباشد. ثابت می‌کنیم که خط دیگر، یعنی D، باصفحهٔ P موازی است (شکل ۸).

اگر Aa مصور یکی از نقاط D باشد، بر δ عمود است، و δ که عمود است بر d و بر Aa بر صفحهٔ مصور D عمود می‌شود. پس D بر δ

عمود است .

خط D که عمود است بر دوخط غیر‌موازی Δ و δ از صفحهٔ مصور Δ ، بر این صفحه عمود است و در نتیجه با صفحهٔ تصویر موازی است[1].



(ش ۸)

۱۳ ـ قضیه ـ اگر تصویرهای دو خط برهم عمود باشند و یکی از آن دوخط با صفحهٔ تصویر موازی باشد ، دو خط بر یکدیگر عمودند .

برهان ـ در شکل ۸ ، اگرفرض کنیم که D با d موازی و d بر δ عمود باشد ، ثابت می‌کنیم که D بر Δ عمود است .

چون D با d موازی است ، عمود است هم بر δ (که بر d عمود است) وهم برمصور Bb (که برصفحهٔ تصویرعموداست) ؛ پس D برصفحهٔ مصورخط Δ عمود می‌شود، یعنی برهمهٔ خطوط آن ازجمله بر Δ عموداست.

۱۴ـ قضیه ـ تصویرهای خطوط متوازی بایکدیگر موازیند.

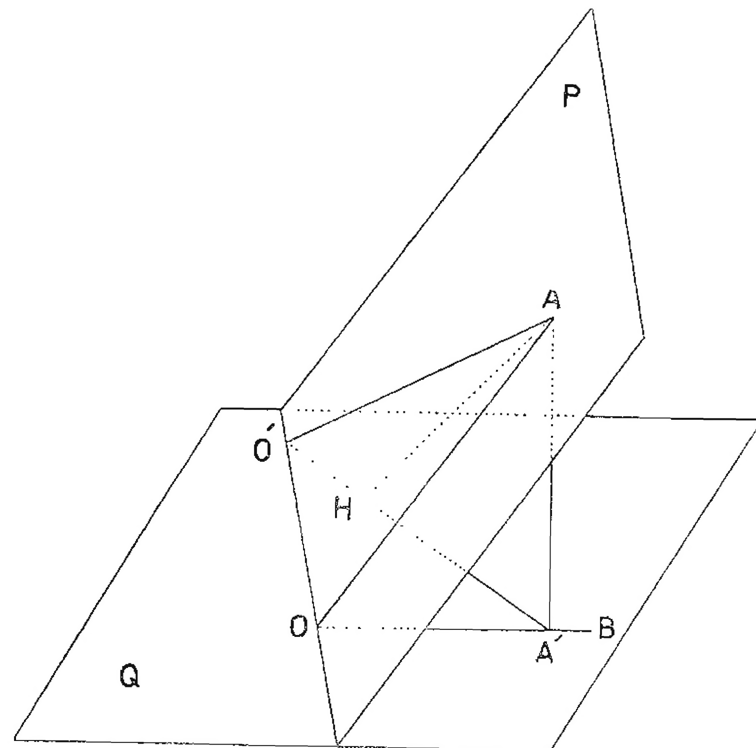
برهان ـ فرض می‌کنیم که Δ با D موازی باشد (شکل ۹) . چون دو مصور Aa و Bb نیز باهم موازیند ، صفحات مصور Δ و D باهم موازی هستند و فصل مشترکهایشان با صفحهٔ P (یعنی δ و d تصاویر دو خط) ، متوازیند .

۱ـ خط و صفحهٔ عمود بریک صفحه با یکدیگر موازیند .

(ش ۹)

۱۵ ـ عکس این قضیه صحیح نیست، یعنی متوازی بودن تصاویر دوخط، دلیل متوازی بودن آنها نیست.

۱۶ـ تعریف ـ مسطحهٔ فرجهٔ بین دو صفحه، زاویه‌ای است که رأسش روی فصل مشترك دو صفحه باشد و هرضلعش در یکی از دو صفحه واقع بوده و برفصل مشترك دو صفحه عمود باشد (شکل ۱۰ ، $\widehat{AOB}$) .



(ش ۱۰)

هرضلع مسطحهٔ فرجهٔ دو صفحه را می‌توان تصویر ضلع دیگر بر روی صفحهٔ آن ضلع دانست .

۱۷ـ قضیه ـ زاویهٔ مسطحهٔ دوصفحه ، بزرگترین زاویه‌ای است که بین خطوط یکی از آن دوصفحه و تصویرشان برصفحهٔ دیگرتشکیل می‌شود .

برهان ـ در یکی از دو صفحه ، از A خط AO را برفصل مشترك دو صفحه عمود رسم کرده و خط دیگری نیز مانند A'O' رسم می‌کنیم و تصویرش را روی صفحهٔ دیگر A'O' می‌نامیم (شکل ۱۰) . چون A'O بر فصل مشترك عمود و A'O' نسبت به فصل مشترك مایل است ، $A'O'>A'O$. اگر طول A'H را مساوی A'O بر A'O' نقل‌کنیم ، H بین A' و O' واقع می‌شود و در مثلث AHO' زاویهٔ خارجی H بزرگتر از زاویهٔ داخلی O' است : $\widehat{AHA'}>\widehat{AO'A'}$

چون دومثلث AOA' و AHA' برابرند ، $\widehat{AHA'}=\widehat{AOA'}$

و در نتیجه : $\widehat{AOA'}>\widehat{AO'A'}$.

۱۸ـ شیب خط ـ تانژانت زاویهٔ حاده‌ای که خط با تصویرخود بر روی صفحه‌ای می‌سازد ، **شیب** خط نسبت به آن صفحه نام دارد .

در دو صفحهٔ متقاطع ، خطی که در یکی از آنها عمود برفصل مشترك رسم شود ، شیبش از شیب خطوط دیگر صفحه بزرگتراست و به این جهت آن را **خط بزرگترین شیب صفحهٔ اول نسبت به‌صفحهٔ دوم می‌نامند .**

یعنی : **خط بزرگترین شیب صفحهٔ P نسبت به‌صفحهٔ Q خطی**

است از صفحهٔ P که برفصل مشترك دوصفحه عمود باشد .

۱۹ـ مقیاس ـ تصاویر اشیا را عموماً نمی‌توان به اندازهٔ واقعی رسم‌کرد و باید آنها را به یك نسبت کوچك کرده شکلی **مشابه** با تصویر حقیقی رسم کرد ؛ نسبت تشابه شکل مرسوم و تصویر حقیقی را **مقیاس عددی** می‌نامند و آن را به صورت $\frac{1}{k}$ نمایش‌می‌دهند (k عدد صحیح).

مثلاً اگرطولی از تصویر حقیقی شکلی برابر یك متر باشد و آن طول در تصویر مرسوم به ۱ سانتیمتر نموده شود ، مقیاس $\frac{1}{100}$ و اگر به ۲ سانتیمترنموده شود ، مقیاس $\frac{2}{100}$ یا $\frac{1}{50}$ است .

مقیاس عددی تصویر به دو چیز بستگی دارد : یکی صفحه‌ای که باید تصویر را روی آن رسم کنیم و دیگری شکلی که باید تصویرش را رسم کنیم . هرچه شکل بزرگتر ، یا صفحه‌ای‌که باید تصویر را روی آن رسم کنیم کوچکتر باشد ، مقیاس کوچکترخواهد بود .

مثلاً تصویر یك میز را می‌توان به مقیاس $\frac{1}{10}$ روی یك صفحهٔ کاغذ معمولی کشید اما تصویر یك خانه را باید لااقل به مقیاس $\frac{1}{100}$ و تصویر یك شهر را به مقیاس $\frac{1}{1000}$ یا $\frac{1}{10000}$ و نقشهٔ یك کشور را مثلاً با مقیاس $\frac{1}{1000000}$ رسم کرد .

غالباً به جای مقیاس عددی ، **مقیاس خطی** (شکل ۱۱) بکار می‌برند . مقیاس خطی عبارت از دو خط متوازی نزدیك به هم (گاهی یك خط) است که در گوشهٔ نقشه یا شکل می‌کشند و قطعات متوالی



(ش ۱۱)

مساوی واحد طول که به‌مقیاس تحویل شده‌باشد بر روی آن جدا می‌کنند؛ مثلاً اگر واحد طول متر باشد ، در مقیاس $\frac{1}{100}$ ، که یك سانتیمتر نمایش یك متر است ، بر مقیاس خطی قطعات یك سانتیمتری ، و در مقیاس $\frac{1}{50}$ قطعات۲ سانتیمتری ، جدا کرده و از چپ به‌راست با اعداد۱، ۲، ۳، ... شماره گذاری می‌کنند .

غالباً اولین قطعهٔ طرف چپ مقیاس خطی را به ۱۰ جزء متساوی تقسیم می‌کنند که هر جزء نمایندهٔ $\frac{1}{10}$ واحد طول تحویل شده است ؛ این تقسیمات جزء را از راست به‌چپ شماره می‌گذارند و این قسمت را **پاشنهٔ مقیاس** می‌نامند . از پاشنهٔ مقیاس برای تعیین طولهای کوچکتر از ۱ استفاده می‌شود .

برای تعیین فاصلهٔ حقیقی دو نقطه‌که تصاویر آنها a و b باشند ، دهانهٔ پرگار را به‌اندازهٔ ab باز می‌کنیم و آن را روی مقیاس می‌گذاریم و فاصله را می‌خوانیم .

در هندسهٔ رقومی همیشه با واحد سروکار داریم. مقصود از واحد همه جا واحدی است که برای اندازه گیری ابعاد شکل اختیار کرده و به مقیاس تحویل نموده‌ایم .

اگر برای واحد ، سانتیمتر یا طول مشخص دیگری اختیار نشود ممکن است پاره خطی را به منزلهٔ واحد اختیار کنید و در کنار شکل آن را نمایش دهید .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ – تصویر غالباً وسیلهٔ خوبی برای بیان مقصود است .

۲ – تصویر را به دو نوع می‌توان تقسیم‌کرد :

الف – تصویری‌که طبق قواعد نقاشی‌کشیده می‌شود و اشیا را بطوری که با چشم دیده می‌شوند مجسم می‌سازد .

ب – تصویری‌که با قواعد هندسهٔ رقومی و هندسهٔ ترسیمی رسم می‌شود و اشیا را بطوری‌که هستند مشخص می‌سازد .

۳ – تصویر نقطه برصفحه ، پای عمودی است که از نقطه بر صفحه فرود آید .

۴ – تصویر نقطه بتنهایی برای مشخص کردن نقطه کافی نیست . در هندسهٔ رقومی ، علاوه برتصویر ، رقوم نقطه نیزداده می‌شود .

۵ – تصویرخط مستقیم خطی است مستقیم .

۶ – هرگاه یکی از دوخط عمودبرهم باصفحهٔ تصویر موازی و دیگری برصفحهٔ تصویرعمود نباشد تصویرهای‌آن دوخط برهم عمود خواهند بود .

۷ – اگر تصاویر دو خط برهم عمود باشند و لااقل یکی از آن دوخط با صفحهٔ تصویرموازی باشد ، دو خط بریکدیگرعمودند .

۸ – طول تصویر یك پاره خط مساوی است با طول آن پاره خط ضرب در کسینوس زاویهٔ بین خط و تصویرش .

۹ – تصویرهای خطوط متوازی باهم موازیند .

۱۰ – خط‌بزرگترین شیب صفحهٔ P نسبت به صفحهٔ Q خطی است‌که در صفحهٔ P برفصل مشترك دو صفحه عمود رسم شود .

فصل دوم

نقطه و خط

۱ـ موضوع هندسهٔ رقومی ، نمایش اشکال فضایی است به وسیلهٔ تصاویر آنها بر یك صفحه و فواصل نقاطشان از آن صفحه .

۲ـ صفحهٔ تصویر ـ چون برای مطالعهٔ نقشه ، معمولا آن را روی یك صفحهٔ افقی قرار می‌دهند ، صفحهٔ تصویر را ، که در حقیقت همان صفحه‌ای است که روی آن شکل می‌کشیم ، **صفحهٔ افقی** می‌نامند.

هنگامی که روی کاغذ یا تختهٔ سیاه تصاویر اشکال را می‌کشیم کاغذ یا تختهٔ سیاه را به‌جای صفحهٔ افقی اختیار می‌کنیم .

در هندسهٔ رقومی عموماً به‌جای‌گفتن صفحهٔ افقی تصویر ، اصطلاح **صفحهٔ مقایسه** را بکار می‌برند ، زیرا که در حقیقت وضع نقاط را با صفحهٔ تصویر مقایسه می‌کنیم .

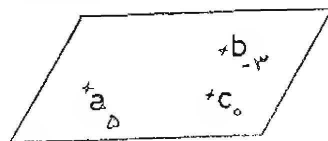
۳ـ رقوم نقطه ـ فاصلهٔ هر نقطه از صفحهٔ مقایسه ، **رقوم** آن نقطه نام دارد .

برطبق قرارداد ، بر حسب آنکه نقطه‌ای روی صفحهٔ مقایسه یا بالا یا زیر آن باشد ، بترتیب رقومش صفر یا مثبت یامنفی است .

نقطه‌ای را که فاصله‌اش از صفحهٔ مقایسه ، یعنی رقومش ، عدد

صحیح باشد ، نقطهٔ **صحیح‌الرقوم** می‌گویند .

۴ـ نمایش تصویر نقطه ـ ملخص نقطه ـ تصویر هر نقطه را با همان حرفی که اسم نقطه است ولی با حرف کوچك نمایش می‌دهیم و رقوم آن را ، به شکل اندیس ، در طرف راست و پایین آن می‌نویسیم .



(ش ۱)

در شکل ۱ ، a_5 نمایش نقطهٔ A است به‌فاصلهٔ ۵ بالای صفحهٔ مقایسه و نقطهٔ c_0 نمایش نقطهٔ C است‌روی صفحهٔ مقایسه و نقطهٔ b_{-3} نمایش نقطهٔ B است به فاصلهٔ ۳ زیر صفحهٔ مقایسه .

تصویر نقطه‌ای را که رقومش در کنارش نوشته شده باشد ، تصویر رقوم‌دار نقطه می‌گویند ؛ در ترسیم ، عملاً صفحهٔ مقایسه را به شکل متوازی‌الاضلاع محدود نمی سازند (شکل ۲) و تصاویر نقاط ، به تناسب بزرگی و کوچکی شکل ، در سراسر صفحه پرا کنده‌اند .

b_{-3}
a_5
c_0

(ش ۲)

نقطهٔفضایی را باحرف تصویرو رقومش نمایش‌می‌دهیم ومی‌خوانیم؛ مثلاً نقطهٔ فضایی A را که تصویرش a و رقومش ۵ است مانند شکل ۲ به صورت a_5 نمایش می‌دهیم و اینطور می‌خوانیم : **a** رقوم ۵ .

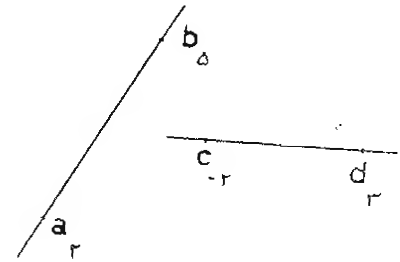
گاهی نیز نقطه را با حرف بزرگ و بی‌رقوم نام می‌بریم .

تصویر نقطه و نام آن و رقومش را ، روی‌هم ، **ملخص** نقطه می‌گویند

۵ ـ ملخص شکل فضایی ـ ملخص هر شکل فضایی F شکلی

است‌که از مجموعهٔ تصاویر رقوم‌دار نقاط مختلف شکل F حاصل می‌شود.

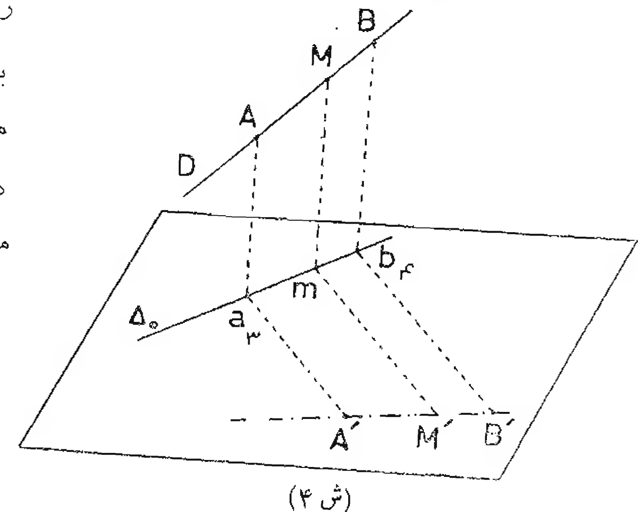
در ملخص یك شکل، عموماً تصویر و رقوم نقاط مهم آن را تعیین می‌کنند بقسمی‌که به‌کمك ملخص این نقاط بتوان ملخص سایر نقاط شکل راکامل‌کرد؛ مثلاً ملخص یك خط مستقیم به‌وسیلهٔ ملخص دو نقطه‌اش مشخص می‌شود مانند خط $a_2\ b_5$ و $c_{-2}\ d_3$ (شکل ۳).



(ش ۳)

۶ـ خط قائم ـ خط قائم خطی است که بر صفحهٔ مقایسه عمود باشد. تصویرهای تمام نقاط خط قائم بر هم منطبق هستند، یعنی تصویر خط قائم، یك نقطه است. گاهی برای اینکه تصویر خط قائم با تصویر نقطه اشتباه نشود، تصویرخط قائم را در داخل دایرهٔ کوچکی می‌گذارند.

۷ـ تسطیح خط برصفحهٔ مقایسه ـ هرگاه $a_3 b_4$ (شکل۴) تصویر رقوم دار AB باشد و صفحهٔ مصور AB را در حول فصل مشترك‌ش باصفحهٔ مقایسه، یعنی در حول Δ_0، به اندازهٔ ۹۰° دوران دهیم تا



(ش ۴)

برصفحهٔ مقایسه منطبق شود، AB به‌وضع A'B' درمی‌آید؛ A'B' را **تسطیح** خط AB در حول Δ_0 برصفحهٔ مقایسه می‌گویند.

در موقع تسطیح خط AB بر صفحهٔ مقایسه، هر نقطهٔ آن مانند A یك ربع دایره به مرکز a می‌پیماید که صفحه‌اش بر Δ_0، یعنی بر ab، عمود است و A به‌وضع A' قرار می‌گیرد بقسمی که:

رقوم نقطهٔ $A = aA = aA'$

برای تسطیح هر نقطه مانند a_3 از خط D، کافی است که درصفحهٔ مقایسه از a عمودی بر تصویر خط اخراج کرده و به اندازهٔ رقوم نقطه بر آن جدا کنیم تا A' تسطیح a_3 بدست آید.

برای تسطیح خط، دو نقطهٔ آن را تسطیح کرده و آنها را به هم وصل می‌کنیم. چنانچه تسطیح خطی معلوم باشد، برای بدست آوردن تسطیح هر نقطه مانند m واقع بر همان خط، از m عمودی بر ab اخراج می‌کنیم تا A'B' را در M' قطع کند؛ M' تسطیح m است.

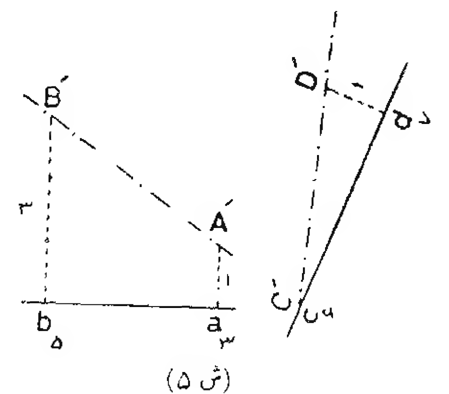
فایدهٔ تسطیح خط بر صفحهٔ مقایسه این است که یك خط فضایی را که از دسترس خارج است روی صفحهٔ مقایسه می‌آورد و در دسترس ما قرار می‌دهد تا بر آن طولی جدا کنیم، یا نقطه‌ای را معین سازیم و یا مسائلی نظیر اینها را حل کنیم.

در تسطیح خط، جزئی از خط که بالای صفحهٔ مقایسه است، در یك طرف تصویر خط، یعنی در یك طرف ab، تسطیح می‌شود و جزئی که زیر صفحهٔ مقایسه است، در طرف دیگر ab. به‌عبارت دیگر، نقاطی که رقومشان مثبت است در یك طرف ab و آنها که رقومشان منفی است در طرف دیگر ab تسطیح می‌شوند. رقوم نقطهٔ تلاقی تسطیح و تصویر

خط صفر است .

می‌توان خط را ، به جای تسطیح بر صفحهٔ مقایسه ، بر صفحه‌ای که موازی صفحهٔ مقایسه باشد تسطیح کرد ؛ در این صورت روی عمودی که از تصویر نقطه بر تصویر خط اخراج می‌کنیم طولی مساوی اختلاف رقوم نقطه و رقوم صفحه‌ای که خط بر آن تسطیح می‌شود جدا می‌کنیم تا تسطیح نقطه بر آن صفحه بدست آید .

در شکل ۵ ، A'B' تسطیح خط a_3b_5 بر صفحه‌ای به‌رقوم ۲ وخط C'D' تسطیح خط c_6d_2 بر صفحه‌ای به‌رقوم ۶ است .



(ش ۵)

برای اینکه بین تسطیح و تصویر خط تمایزی باشد، معمولاً تسطیح را با خط و نقطه نمایش می‌دهیم و تصویر را با خط تمام .

۸ ـ ترفیع خط ـ اگر خطی مانند AB (شکل ۴) را در A'B' بر صفحهٔ مقایسه تسطیح کنیم و بعد صفحهٔ تصویر را درحول فصل مشترك ab به اندازهٔ ۹۰° در جهت عکس دورانی که تسطیح را انجام داده‌ایم دوران دهیم تا خط A'B' به‌وضع اصلی خود ، AB ، در آید ، می‌گوییم که خط A'B' را **ترفیع** کرده‌ایم .

دو عمل ترفیع و تسطیح عکس یکدیگرند . برای ترفیع هر نقطهٔ خط مانند M' که تسطیحش معلوم باشد ، از M' عمودی بر تصویر خط فرود می‌آوریم تا آن را در m قطع کند ، m تصویر نقطهٔ مطلوب است.

چون فاصلهٔ تسطیح نقطه از تصویرش مساوی رقوم نقطه است ، mM' برابر رقوم m است که اندازهٔ آن را تعیین کرده و زیر m می‌نویسیم .

۹ ـ فاصلهٔ دو نقطه ـ فاصلهٔ دو نقطه را یا با محاسبه یا بوسیلهٔ ترسیم تعیین می‌کنیم .

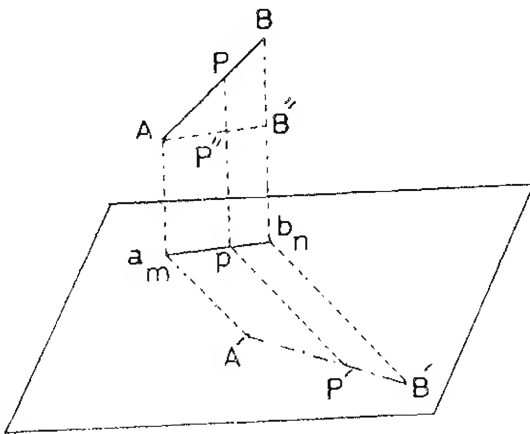
الف ـ **طریقهٔ محاسبه ـ** اگر از A (شکل ۶) خط AB" را موازی ab رسم کنیم تا خط مصور نقطهٔ B را در B" قطع کند، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AB"B می‌توان نوشت :

$$AB^2 = AB''^2 + B''B^2$$

یا

$$AB^2 = ab^2 + (\text{رقوم } b - \text{رقوم } a)^2 = ab^2 + (n-m)^2$$

طول ab ، تصویر خط ، را اندازه گرفته و به‌کمك دستور بالا طول AB را تعیین می‌کنیم .



(ش ۶)

ب ـ **طریقهٔ ترسیم ـ** خط AB را در A'B' برصفحهٔ مقایسه تسطیح می‌کنیم و آن را اندازه می‌گیریم .

تمرین ۱ ـ از نقطهٔ a_2 درروی خط a_2b_0 طولی مساوی ۵ جداکنید.

تمرین ۳ ـ نقطهٔ a_5 و b تصویر بی رقوم نقطه‌ای داده شده و فاصلهٔ حقیقی دونقطه ۴ است . رقوم نقطهٔ b رابدست‌آورید (از راه‌محاسبه‌وترسیم).

۱۰ ـ دو مسئله ـ مسئلهٔ اول ـ p تصویر بی‌رقوم یك نقطه

از خط $a_m b_n$ داده شده است ، رقوم آن را بدست آورید .

الف ـ **طریقهٔ محاسبه** ـ اگر رقوم p را x فرض کنیم (شکل۶)، در مثلث $AB''B$ ، خط $P''P$ موازی $B''B$ است و به موجب قضیهٔ تالس

$$\frac{P''P}{B''B}=\frac{AP''}{AB''}$$

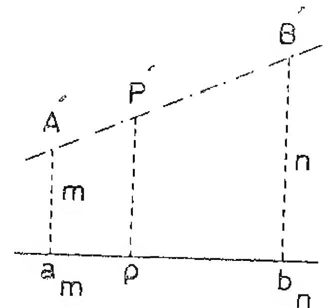
یا

$$\frac{x-m}{n-m}=\frac{ap}{ab}$$

پس

$$x=(n-m)\frac{ap}{ab}+m$$

ب ـ **طریقهٔ ترسیم** ـ $a_m b_n$ را در $A'B'$ و p را در P' تسطیح می‌کنیم (شکل ۷) و pP' را اندازه می‌گیریم ؛ pP' مساوی رقوم نقطهٔ p است .



(ش ۷)

مسئلهٔ دوم ـ مسئلهٔ عکس ـ بر خط $a_m b_n$ نقطه‌ای تعیین کنید که رقوم آن h باشد .

طریقهٔ محاسبه ـ اگر نقطهٔ مطلوب را P و فاصلهٔ p از a را y فرض کنیم (شکل۶) ، خواهیم داشت :

$$\frac{P''P}{B''B}=\frac{AP''}{AB''}$$

یا

$$\frac{h-m}{n-m}=\frac{ay}{ab}$$

یعنی

$$y=ab\times\frac{h-m}{n-m}$$

طریقهٔ ترسیم ـ پس از آنکه $a_m b_n$ را در $A'B'$ تسطیح کردیم، روی bB' طول bK را مساوی h جدا می‌کنیم و از K خطی موازی ab می‌کشیم تا $A'B'$ را در P' قطع کند ؛ از P' عمودی بر ab فرود می‌آوریم تا p تصویر نقطهٔ مطلوب P از خط AB که رقومش h است بدست آید .

۱۱ـ اثر خط ـ اثر خط یعنی فصل مشترك آن باصفحهٔ مقایسه ، بنا براین نقطه‌ای است از خط ، بدرقوم صفر .

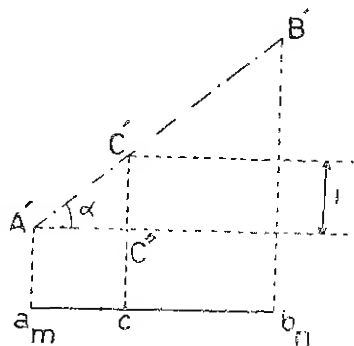
تمرین ۳ـ بر خط $a_4 b_7$ که طول تصویرش ab=۶ است : ۱) نقطه‌ای بهارتفاع ۵ پیداکنید و آن را m بنامید. ۲) نقطهٔ p بهفاصلهٔ ۲ از a داده‌شده است ؛ رقوم آن را بدست آورید . ۳) اثرخط را بدست‌آورید .

۱۲ـ میل خط ، شیب و فراز خط ـ هما‌نطور که می‌دانید ، میل خط زاویهٔ آن باصفحهٔ مقایسه یعنی با تصویرش برصفحهٔ مقایسه‌است .
تانژانت میل هرخط را شیب و کتانژانت میل را فراز یا اساس خط می‌گویند .

شیب $= p = tg\alpha$

فراز $= i = cotg\alpha$

هرگاه خط $a_m b_n$ (شکل۸) را تسطیح کرده و بر آن نقطه‌ای‌مانند c تعیین کنیم که رقومش از رقوم a یك واحد بیشتر باشد ، می‌توان نوشت :



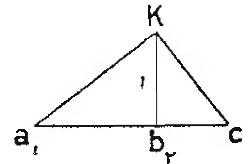
(ش ۸)

$i =$ فراز $= cotg\alpha=\frac{A'C''}{C''C'}=\frac{ac}{۱}=ac$

$$p = \text{شیب} = tg\alpha = \frac{1}{ac}$$ و

بنا براین : ۱) **فراز هر خط ، فاصلهٔ بین تصاویر دو نقطهٔ آن است که اختلاف رقومشان ۱ باشد .**

۲) شیب هر خط عکس فاصلهٔ تصاویر دو نقطهٔ آن است که اختلاف رقومشان ۱ باشد ، بنا براین فراز هر خط را می‌توان بر روی تصویر آن بدست آورد . برای تعیین شیب خط باید عکس فراز آن را بسازیم ؛ این کار به‌کمك رسم مثلث قائم‌الزاویه انجام می‌شود ؛ مثلاً برای ساختن عکس $ab = i$ (شکل ۹) که فراز خط a_1b_2 است، از b عمودی بر ab اخراج می‌کنیم و طول $bk = 1$ را بر آن جدا کرده و از k خطی بر ak عمود می‌کنیم تا امتداد ab را در c قطع کند ؛ bc عکس فراز ، یعنی شیب خط a_1b_2 است زیرا :



(ش ۹)

$$bk^2 = 1 = ab \cdot bc$$

$$bc = \frac{1}{ab} = \frac{1}{i} = p$$

۱۳- مدرج کردن خط - مدرج کردن خط یعنی تعیین نقاط صحیح‌الرقوم خط که اختلاف رقومشان ۱ باشد . برای مدرج کردن خط، یك نقطهٔ صحیح الرقوم روی تصویر خط اختیار کرده و در طرفین آن به اندازهٔ فراز خط جدا می‌کنیم تا نقطه‌ای که رقومش با آن، به‌اندازهٔ ۱ اختلاف داشته باشد ، بدست آید . به همین ترتیب نقاط متعددی را تعیین کرده و خط را مدرج می‌کنیم .

تمرین ۴- اولاً خط a_1b_4 که فاصلهٔ a و b در روی آن ۸ است داده می‌شود ؛ شیب و فراز خط را بدست آورید و آن را مدرج کنید .

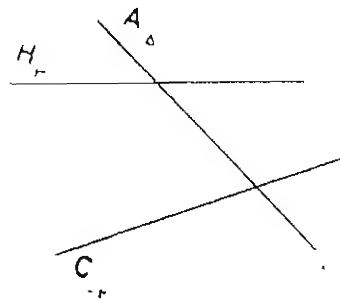
ثانیاً خط $m_{4/8}n_{3/6}$ که فاصلهٔ m و n در روی آن ۵ است داده می‌شود ؛ شیب و فراز این خط را تعیین‌کرده وآن را مدرج‌کنید .

خطهای مهم

۱۴ - خطهای مهم عبارتند از خطهای موازی با صفحهٔ مقایسه یا عمود بر صفحهٔ مقایسه . اولی را **افقی** و دومی را **قائم** می‌نامند .

۱۵ - خط افقی آن است که با صفحهٔ مقایسه موازی باشد ، پس تمام نقاط آن دارای یك رقوم هستند .

خط افقی را معمولاً بایك حرف بزرگ که رقوم خط در گوشهٔ راست و پایین آن نوشته شده باشد نمایش می‌دهند ، مانند خطهای H_2 و A_5 و C_2 (شکل ۱۰) .



(ش ۱۰)

شیب خط افقی صفر و فراز آن بینهایت بزرگ است .

۱۶ - خط قائم یا شاغولی آن است که بر صفحهٔ مقایسه عمود باشد . تصاویر تمام نقاط آن بر یکدیگر منطبق هستند ، یعنی **تصویر خط قائم نقطه است** . برای متمایز ساختن تصویر خط قائم از تصویر نقطه ، گاهی تصویر خط قائم را در داخل دایرهٔ کوچکی قرار می‌دهند.

فراز خط قائم صفر و شیب آن بینهایت بزرگ است .

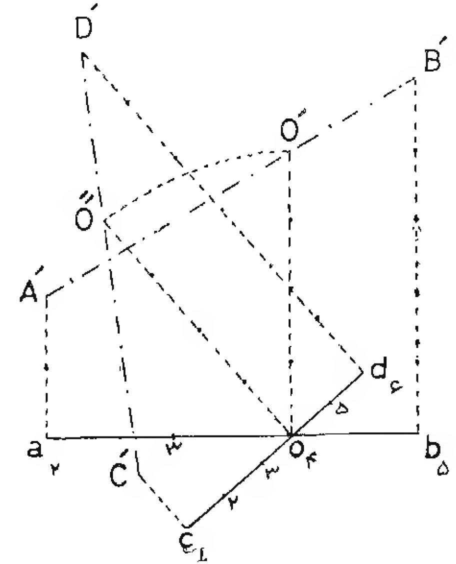
اوضاع مختلف دوخط

۱۷ ـ می‌دانیم که اگر بر دو خط بتوانیم یك صفحه مرور دهیم ، این دوخط یا **متقاطع** هستند یا **متوازی** و در غیراین صورت **متنافرند.**

خطوط متقاطع

۱۸ـ قضیه ـ شرط لازم و کافی برای اینکه دوخط متقاطع باشند این است که تصاویرشان یکدیگر را قطع کنند و نقطهٔ تقاطع بر روی هر دو خط دارای یك رقوم باشد .

الف ـ **لزوم شرط ـ** وقتی که دوخط متقاطع باشند نقطهٔ مشترکی دارند که چون روی هر دوخط است تصویرش روی هردو تصویر می‌افتد ، یعنی دو تصویر متقاطع می‌شوند و چون یك نقطه بیشتر نیست رقوم آن روی هردو خط یکی است .



(ش ۱۱)

ب ـ **کفایت شرط ـ** اگر تصویرهای دوخط متقاطع باشند و نقطهٔ تقاطع بر روی هردوخط دارای یك رقوم باشد ، آن نقطه روی هر دو خط واقع است ، یعنی دو خط یك نقطهٔ مشترك دارند و متقاطعند .

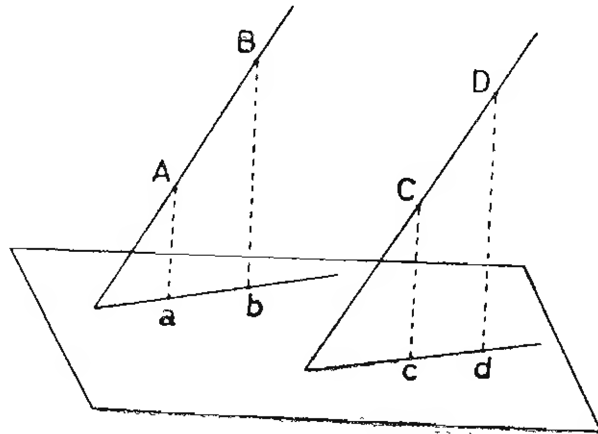
تحقیق متقاطع بودن دو خط را ممکن است از راه محاسبه انجام

داد و رقوم نقطهٔ تقاطع را بر هر دو معین کرد ، ولی بهتر است که این کار با ترسیم صورت پذیرد (شکل ۱۱) .

خطوط متوازی

۱۹ـ قضیه ـ هرگاه دوخط متوازی باشند، الف ـ تصویرها متوازیند ، ب ـ فرازها متساویند ، ج ـ ترقی رقومها در یك جهت است .

الف ـ تصویرها متوازیند ، زیرا صفحات مصور دو خط متوازیند.



(ش ۱۲)

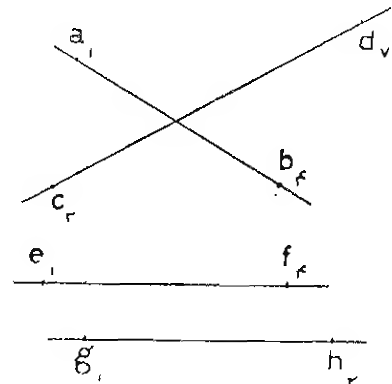
ب ـ فرازها متساویند ، زیرا که میل دو خط متوازی نسبت به صفحهٔ مقایسه یکی است ، پس کتانژانت میلها ، یعنی فرازهای دو خط نیز یکی است .

ج ـ ترقی رقومها در یك جهت است ، زیرا که اگر مثلاً بر روی خط AB (شکل ۱۲) از چپ به‌راست رقومها زیاد شوند بر روی CD هم که با AB موازی است رقومها از چپ به راست ترقی می‌کنند .

۲۰ ـ دو خط که نه متوازی باشند و نه‌متقاطع متنافرند ، مانند

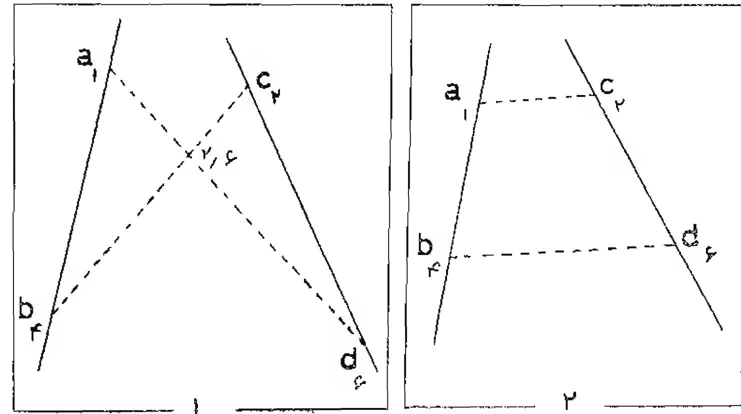
دو خط a_1b_4 و c_2d_7 یا دو خط e_1f_4 و g_1h_2 در شکل ۱۳ .

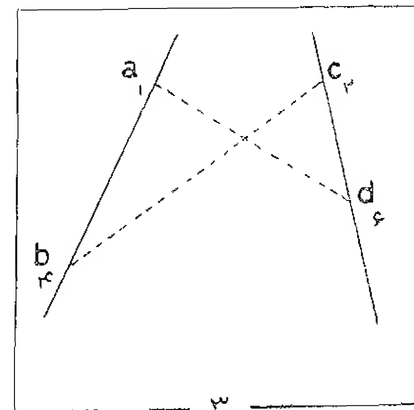
۴۱ ـ مسئله ـ تصویرهای دو خط در خارج حدود شکل متقاطعند؛ وضع آنهارا نسبت به یکدیگر تحقیق کنید .



(ش ۱۳)

حل ـ دو نقطه، مثلاً a_1 و b_4 از یکی را به دو نقطه ، مثلاً c_2 و d_6 از خط دیگر وصل می‌کنیم. اگر دوخطی که به این ترتیب حاصل می‌شوند متقاطع (شکل ۱۴ـ۱) یا متوازی (شکل ۱۴ ـ ۲) باشند، یك



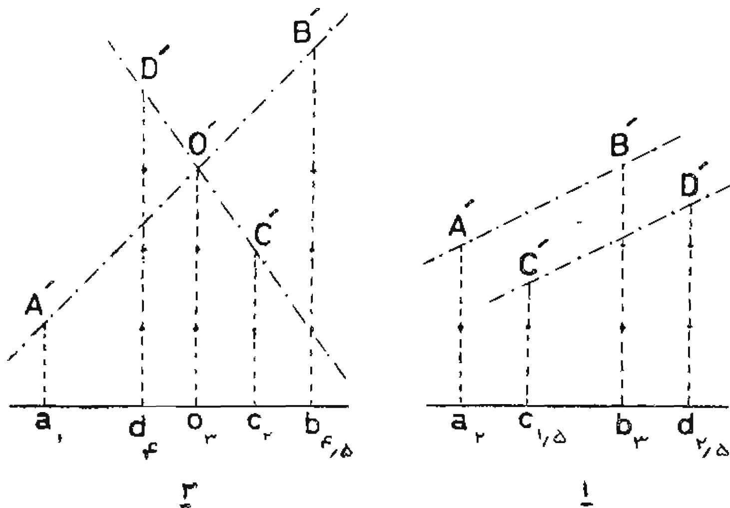


(ش ۱۴)

صفحه تشکیل می‌دهند و چون دو نقطه از هر یك از دو خط a_1b_4 و c_2d_6 در آن صفحه‌اند ، دو خط در یك صفحه هستند پس متقاطعند . اما اگر دو خط a_1d_6 و c_2b_4 متنافر باشند (شکل ۱۴ـ۳) ، دو خط مفروض در یك صفحه نیستند .

۴۲ ـ مسئله ـ تصاویر دو خط بر یکدیگر منطبقند ، وضع آنها را نسبت به هم معین کنید .

صفحهٔ مصور دوخط را تسطیح می‌کنیم تا A'B' و C'D' تسطیحهای دو خط بدست آید . اگر A'B' و C'D' متوازی باشند ، دو خط با



(ش ۱۵)

یکدیگر موازی هستند (شکل۱۵ـ۱) و گرنه یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۱۵ـ۲) ؛ رقوم نقطهٔ تقاطع را در تسطیح بدست می‌آوریم .

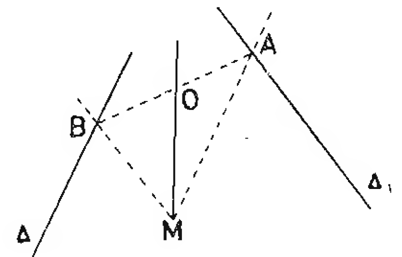
بدیهی است با توجه به فراز خطها و جهت ترقی رقوم ، بدون تسطیح نیز می‌توان وضع دو خط را معین کرد .

تمرین ۵ ـ در شکل ۱۵ ـ ۲ ، بی‌آنکه از تسطیح استفاده کنید ، رقوم نقطهٔ تقاطع دو خط را حساب کنید .

۲۳ - حل یك مسئلهٔ مسطحه - دو خط Δ و Δ_1 در خارج حدود شکل متقاطعند. از نقطهٔ مفروض M واقع درصفحهٔ دوخط، خطی رسم کنید که بر نقطهٔ تقاطع آنها بگذرد .

این مسئله راه حلهای متعدد دارد . ما در اینجا سه راه را بیان می‌کنیم .

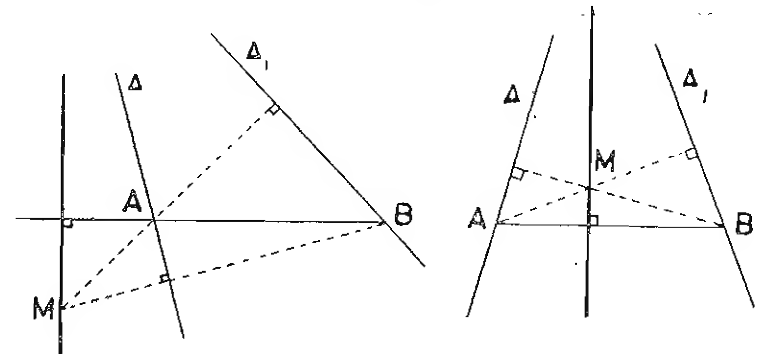
راه اول - از M دوخط بموازات Δ و Δ_1 می‌گذرانیم (شکل ۱۶) تا Δ_1 و Δ را بترتیب در A و B قطع کنند ؛ خطی که از M به O ، وسط AB ، وصل شود بر نقطهٔ تقاطع Δ و Δ_1 می‌گذرد (اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند).



(ش ۱۶)

این راه حل وقتی بکار می‌رود که M بین Δ و Δ_1 باشد وخطهایی که از M موازی خطوط رسم شوند آنها را در حدود شکل قطع کنند .

راه دوم - از M عمودی بر Δ فرود می‌آوریم تا Δ_1 را در B

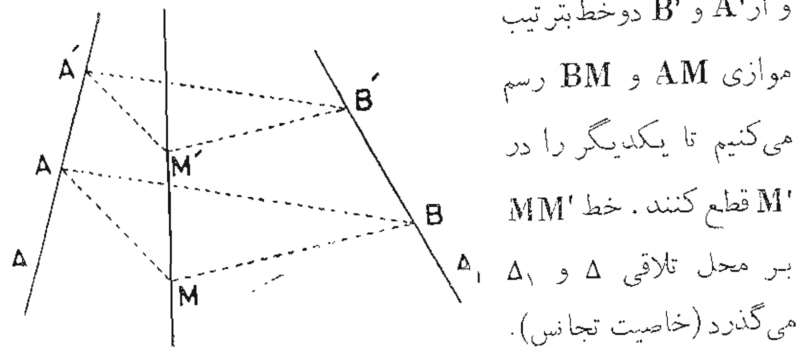


(ش ۱۷)

قطع کند و نیز عمودی بر Δ_1 فرود می‌آوریم تا Δ را در A قطع کند (شکل ۱۷) ، خطی که از M بر AB عمود شود از نقطهٔ تلاقی Δ و Δ_1

خواهد گذشت (خاصیت ارتفاعات مثلث) .

راه سوم - خطی بدلخواه می‌کشیم تا Δ را در A و Δ_1 را در B قطع کند (شکل ۱۸) . از M به A و B وصل می‌کنیم و از یك نقطهٔ دلخواه ، خطی موازی AB می‌کشیم تا Δ و Δ_1 را در A' و B' قطع کند و از A' و B' دوخط بترتیب موازی AM و BM رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M' قطع کنند . خط MM' بر محل تلاقی Δ و Δ_1 می‌گذرد (خاصیت تجانس).



(ش ۱۸)

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ - درهندسهٔ رقومی هرنقطه به‌وسیلهٔ تصویر و رقومش (یعنی فاصله‌اش از صفحهٔ مقایسه) مشخص می‌شود . نقطهٔ فضایی را با حرف بزرگ لاتین و تصویر آن را با همان حرفی که اسم نقطهٔ فضایی است ولی با حرف کوچك نمایش می‌دهیم . تصویر نقطه و نام آن و رقوم آن را روی هم ملخص نقطهٔ فضایی می‌گویند . رقوم نقاط واقع در بالای صفحهٔ مقایسه مثبت و در زیر صفحهٔ مقایسه منفی و در روی صفحهٔ مقایسه صفر است .

۲ - تصویر خط مستقیم خطی است مستقیم . تصاویردو نقطهٔ آن را به هم وصل می‌کنیم تا تصویر خط بدست آید .

۳ - تسطیح خط عبارت از این است که صفحهٔ مصور خط را در حول

فصل مشترك با صفحهٔ مقایسه، به‌اندازهٔ ۹۰° دوران دهیم تا بر صفحهٔ مقایسه منطبق شود .

۴ ــ برای تسطیح خط از تصویر دو نقطهٔ‌آن عمودهایی برتصویر خط رسم می‌کنیم و روی هریك طولی مساوی رقوم نقطه جدا می‌کنیم و دونقطه‌ای را که به این ترتیب بدست می‌آیند بهم وصل می‌کنیم .

۵ ــ به‌کمك تسطیح خط این مسائل را حل می‌کنیم : ۱) اگر تصویر یك نقطه از خط داده شده باشد رقوم آن را بدست می‌آوریم . ۲) اگر رقوم نقطه‌ای ازخط معلوم باشد تصویر آن را پیدا می‌کنیم . ۳) زاویهٔ خط باصفحهٔ مقایسه را بدست می‌آوریم . ۴) وضع نقطه‌ای را باخط مقایسه می‌کنیم .

۶ ــ ترفیع عکس تسطیح است .

۷ ــ میل خط ، زاویهٔ خط است با تصویرش ، یعنی باصفحهٔ مقایسه . تانژانت این زاویه شیب خط و کتانژانت این زاویه فراز خط است . شیب خط مساوی اختلاف رقوم دو نقطه از آن است که فاصلهٔ تصویرهایشان مساوی ۱ باشد . فراز خط مساوی فاصلهٔ تصاویر دو نقطه از خط است که اختلاف رقومشان ۱ باشد .

۸ــ خط افقی با صفحهٔ مقایسه موازی است . همهٔ نقاط آن یك رقوم دارند .

۹ــ شرط موازی بودن دو خط این است که تصاویرشان متوازی ، فرازهایشان متساوی و ترقی رقومشان در یك جهت باشد .

۱۰ــ شرط تقاطع دو خط این است که تصویرهایشان متقاطع باشند و نقطهٔ تقاطع بر روی هر دو دارای یك رقوم باشد .

تمرین

۱ــ تصویر خطی و ملخص یك نقطهٔ a_5 آن داده شده است . خط را با یکی از شرطهای زیرمشخص کنید :

الف ــ با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۶۰° بسازد (چند جواب ؟) .

ب ــ شیبش مساوی $\frac{1}{2}$ باشد (چند جواب ؟).

ج ــ بر روی‌آن فاصلهٔ حقیقی نقطهٔ a_5 از نقطهٔ B به‌رقوم ۷ مساوی۴ باشد (چند جواب ؟) (نقطهٔ B روی خط است) .

د ــ فاصلهٔ a_5 از نقطهٔ M مساوی ۵ و فاصلهٔ a ازتصویر M مساوی ۳ باشد (چند جواب ؟) (نقطهٔ M روی خط است) .

۲ــ از نقطهٔ a_2 خطی با این شرایط رسم‌کنید :

الف ــ خط قائم V را در نقطه‌ای به ارتفاع ۶ قطع کند . فراز این خط را بدست آورید و زاویه‌اش را با صفحهٔ مقایسه معین کنید .

ب ــ با خط مفروض c_2d_4 موازی باشد .

ج ــ خط مفروض c_2f_6 را در نقطه‌ای به‌رقوم ۴ قطع‌کند. شیب خطی راکه بدست می‌آورید از راه ترسیم نمایش دهید .

۳ــ دونقطهٔ m_5 و n_3 که فاصلهٔ تصاویرشان ۶ سانتیمتر استمفروضند . بر m_5 خطی به شیب ۱ و بر n_3 خطی به‌شیب $\frac{1}{2}$ بگذرانید بقسمی‌که دوخط یکدیگر را روی صفحهٔ مقایسه قطع کنند . مسئله چند جواب دارد ؟

۴ــ مسئلهٔ شمارهٔ ۳ را تکرار کنید مشروط به آنکه فاصلهٔ تصاویرآنها داده نشده باشد. بعد در عدهٔ جوابها و نیز در شرط وجود جواب بحث‌کنید.

۵ــ دو نقطهٔ a_4 و b_5 را به‌فاصلهٔ حقیقی ۳ از یکدیگربدست آورید. بعد برآن دو نقطه دوخط به‌شیبهای معین بگذرانیدکه یکدیگر را در نقطه‌ای به‌رقوم ۱ قطع کنند .

۶ــ بر دو نقطهٔ m_3 و n_5 دوخط بگذرانیدکه هر دو با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵° بسازند وفاصلهٔ بین اثرهای‌آنها ۱/۵ سانتیمتر باشد وخط واصل بین‌آثارآنهاموازی امتداد Δ_0 باشد، فاصلهٔ m از n ، ۷ سانتیمتراختیارشود.

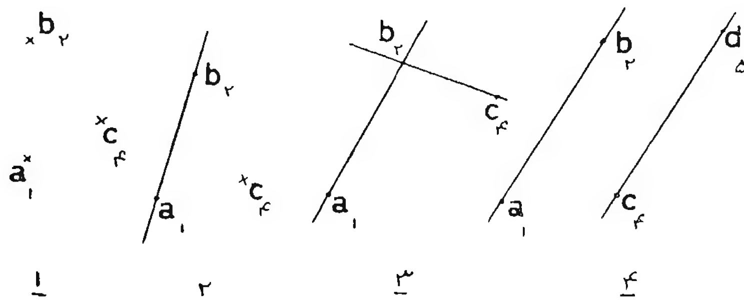
۷ـ خط قائم V ونقطهٔ a_4 که فاصلهٔ حقیقی آن از خط قائم ۳ سانتیمتر است داده شده‌اند . بر a_4 خطی بگذرانید که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ °۵۰ بسازد و فاصلهٔ اثرش از خط قائم ۱ باشد .

۸ ـ خط قائم V و نقطهٔ b_5 داده شده‌اند (فاصلهٔ b از تصویرخط قائم ۵سانتیمتر است) . روی صفحهٔ مقایسه نقطه‌ای پیدا کنید که از b_5 به‌فاصلهٔ ۸ و از خط قائم به فاصلهٔ ۲ باشد .

فصل سوم

صفحه

۱ـ نمایش صفحه ـ در هندسه دیده‌اید که صفحه به وسیلهٔ سه نقطهٔ غیرواقع بر یك استقامت ، یا یك خط و یك نقطه در خارج آن ، یا دوخط متقاطع و یا دوخط متوازی مشخص می‌شود . در هندسهٔ رقومی، صفحه به‌وسیلهٔ ملخص سه نقطه ، یا یك‌خط و یك نقطه در خارج‌آن ، یا دو خط متقاطع ، یا دو خط متوازی نمایش داده می‌شود (شکل ۱) .

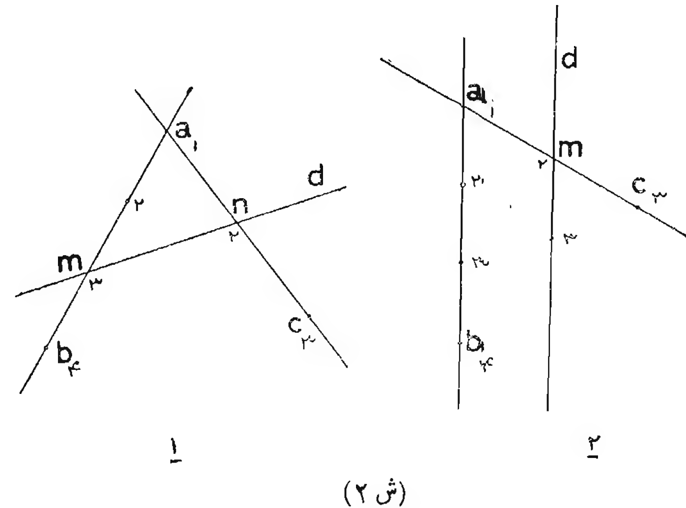


(ش ۱)

بطوری که از شکل نیزبخوبی فهمیده می‌شود ، هر یك از چهار صورت بالا یك صفحه را مشخص می‌سازند .

۲ـ مسئله ـ صفحه‌ای با سه نقطه نموده شده و تصویرخطی از این صفحه در دست است ؛ خط را مدرج کنید .

صفحهٔ $a_1b_4c_3$ و خط d ، تصویر خط فضایی D ، واقع در صفحهٔ ABC مفروضند (شکل ۲) ؛ خط d یا هر دو خط a_1b_4 و a_1c_3 راقطع می‌کند (شکل ۲ ـ ۱) یا با یکی از آنها موازی است (شکل ۲ ـ ۲) .



۱ ۲

(ش ۲)

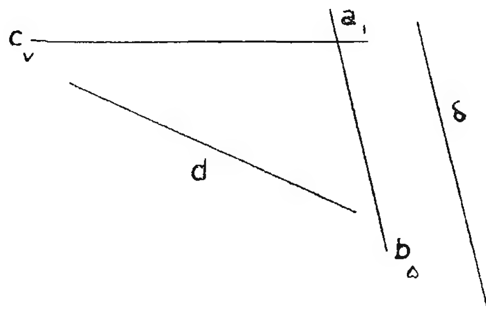
در **حالت اول** ، رقوم نقاط برخورد d با خطوط a_1b_4 و a_1c_3 ، یعنی m و n ، را بر روی a_1b_4 و a_1c_3 بدست می‌آوریم ؛ رقوم m مساوی ۳ و رقوم n مساوی ۲ است؛ چون اختلاف رقومهای m و n مساوی یك است، فاصلهٔ m و n برابر فراز خط D است ؛ همینکه فراز خط بدست آمد، خط d را مدرج می‌کنیم .

در **حالت دوم** ، خط d با a_1b_4 موازی است و رقوم m ، نقطهٔ برخوردآن با a_1c_3، مساوی۲ است ؛ از نقطهٔ m به‌اندازهٔ فراز خط a_1b_4 بر d جدا می‌کنیم و با استفاده از فراز آن وموازی بودن D و AB خط d را مدرج می‌کنیم .

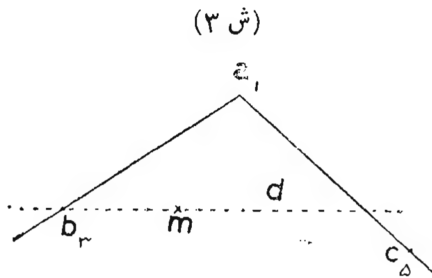
تمرین ـ در شکل ۳، خطهای d و δ را به فرض اینکه در صفحهٔ دو خط a_1b_5 و a_1c_2 باشند، مدرج‌کنید .

۳ـ مسئله ـ m تصویر نقطه‌ای است واقع در صفحهٔ $a_1b_3c_5$ ؛ رقوم m را مشخص کنید .

بر m خط دلخواهی مانند d می‌گذرانیم (بهتراست که خط d از نقطه‌ای‌که رقومش معلوم‌است‌مانند b_3 بگذرد)؛ d را تصویر خطی از صفحهٔ $a_1b_3c_5$ فرض کرده آن را مدرج می‌کنیم و رقوم m را بر روی‌آن بدست می‌آوریم (شکل ۴) .



(ش ۳)

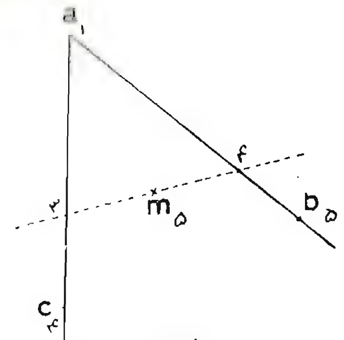


(ش ۴)

۴ـ مسئله ـ نقطه‌ای مانند m_5 وصفحهٔ $a_1b_5c_4$ داده شده‌اند؛ تعیین‌کنید‌که آیا نقطهٔ m_5 در آن صفحه هست یا نیست .

از رقوم نقطهٔ m چشم می‌پوشیم و به‌فرض اینکه m تصویر نقطه‌ای ازصفحه باشد ، رقوم آن را بدست می‌آوریم ؛ اگر این رقوم بارقوم m، یعنی ۵ ، مساوی باشد، m_5 در صفحه است و گر نه نیست . درشکل ۵ ، اگر m در صفحه بود، رقومش ۳/۵ می‌شد و اکنون ۳/۵ نیست ، m_5، در صفحهٔ مذکور نیست .

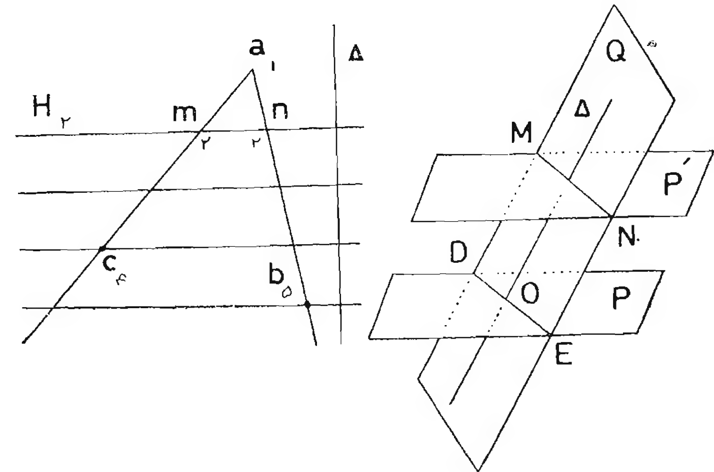
اگر رقومی که برای m به فرض واقع بودن در صفحه ، بدست



(ش ۵)

می‌آید از رقوم اصلی m ، که در فرض داده شده است کمتر باشد ، نقطه بالای صفحه است و اگر از آن بیشتر باشد ، زیر صفحه قرار دارد . در شکل ۵ نقطهٔ $m_۵$ بالای صفحه است .

۵ ـ خطهای افقی صفحه ـ خط افقی، یا افقیهٔ هرصفحه مانند Q (شکل ۶) ، فصل مشترك آن است با صفحه‌ای موازی صفحهٔ مقایسه .



(ش ۷) (ش ۶)

چون تمام نقاط یك خط افقی یك رقوم دارند ، برای رسم افقیه‌ای از صفحه ، مثلاً افقیهٔ رقوم ۲ ، کافی است که دو نقطهٔ رقوم ۲ از صفحه را به یکدیگر وصل کنیم (شکل ۷) .

هر صفحه ، افقیه‌های بیشمار دارد که همه با هم موازیند (زیراکه

فصل مشترکهای یك صفحه با چند صفحهٔ متوازی با یکدیگر موازیند).

اثر صفحه ـ افقیهٔ رقوم صفر صفحه ، یعنی فصل مشترك آن با صفحهٔ مقایسه ، اثر صفحه نامیده می‌شود .

۶ ـ خط بزرگترین شیب صفحه نسبت به صفحهٔ مقایسه ـ چون خط بزرگترین شیب هر صفحه نسبت به صفحهٔ مقایسه بر اثر صفحه عمود است (شمارهٔ ۱۸ فصل اول) ، تصویر خط بزرگترین شیب بر اثر افقی صفحه عمود است (شمارهٔ ۱۱فصل اول) . بنا بر این برای رسم تصویر خط بزرگترین شیب یك صفحه نسبت به صفحهٔ مقایسه ، کافی است که خطی عمود بر تصویر افقیه های صفحه رسم کنیم . در شکل ۷ ، خط Δ تصویر خط بزرگترین شیب صفحهٔ $a_۱b_۵c_۴$ نسبت به صفحهٔ مقایسه است ؛ برای مدرج‌کردن آن از رقوم نقاط برخوردش با افقیه‌ها استفاده می‌کنیم.

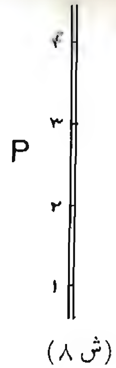
اهمیت خط بزرگترین شیب صفحه در این است‌که بتنهایی برای مشخص‌کردن صفحه کافی است . مثلاً اگر $a_۲b_۴$ ملخص خط بزرگترین شیب صفحه‌ای نسبت به صفحهٔ مقایسه باشد ، می‌توان تصاویر افقیه‌های صفحه را عمود بر ab کشید و با تعیین رقوم یکی از افقیه‌ها (به‌کمك خط $a_۲b_۴$) صفحه را مشخص کرد .

۷ـ مقیاس شیب صفحه ـ چون خط بزرگترین شیب نسبت به صفحهٔ مقایسه مهمترین خط صفحه است ، برای متمایز ساختن آن از خطهای دیگر ، تصویر آن را با دو خط متوازی (شبیه به دو خطی‌که در مقیاس خطی رسم می‌شوند) نمایش می‌دهند و آن را **مقیاس شیب صفحه** می‌نامند (شکل ۸) . **چون زاویهٔ مقیاس شیب هر صفحه با صفحهٔ**

مقایسه، زاویهٔ آن صفحه باصفحهٔ مقایسه است ، شیب و فراز مقیاس شیب هر صفحه ، شیب و فراز آن صفحه‌اند .

۸ ـ نمایش یك صفحه ـ ساده ترین راه برای نمایش یك صفحه استفاده از مقیاس شیب آن است .

برای نمونه چند مثال می‌زنیم :



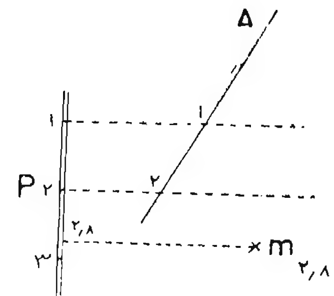
(ش ۸)

مثال ۱ ـ خط Δ در صفحهٔ P است (شکل ۹) و می‌خواهیم آن را مدرج کنیم . برای مدرج کردن آن افقیه‌های رقوم ۱ و ۲ از صفحه را رسم می‌کنیم تا از تلاقی آنها با Δ نقاط رقوم ۱ و ۲ از Δ بدست‌آیند، سپس خط Δ را مدرج می‌کنیم .

مثال ۲ ـ برای تعیین رقوم نقطهٔ m که در صفحهٔ P باشد، از m افقیه‌ای برمقیاس شیب عمود می‌کنیم و رقوم آن را در روی مقیاس شیب بدست می‌آوریم .

در شکل ۹ رقوم نقطهٔ m مساوی ۲٫۸ است .

مثال ۳ ـ برای مشخص‌کردن وضع نقطه‌ای نسبت به یك صفحه ، از تصویر نقطه ، عمودی برمقیاس شیب صفحه رسم کرده و رقوم نقطهٔ تقاطع آن را با مقیاس شیب در روی مقیاس شیب بدست می‌آوریم؛

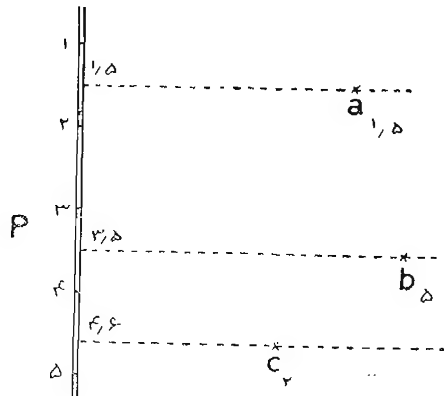


(ش ۹)

بر حسب آنکه این رقوم با رقوم آن نقطه مساوی ، یا بزرگتر از آن

یا کوچکتر از آن باشد ، بترتیب نقطه در صفحه ، یا زیر صفحه یا در بالای آن است .

در شکل ۱۰ نقطهٔ $a_{۱٫۵}$ روی صفحهٔ P ، نقطهٔ $c_{۲}$ زیر صفحه و نقطهٔ $b_{۵}$ بالای صفحه است .



(ش ۱۰)

۹ـ صفحات خاص ـ

الف ـ صفحهٔ افقی ـ صفحهٔ افقی صفحه‌ای است که با صفحهٔ مقایسه موازی باشد . صفحهٔ افقی مقیاس شیب ندارد؛ زیرا که تمام نقاط آن دارای یك رقومند . تمام خطوط این صفحه افقیه هستند که ممکن است متوازی یا متقاطع باشند . هرشکلی که در یك صفحهٔ افقی باشد ، به اندازهٔ حقیقی تصویر می‌شود .

ب ـ صفحهٔ قائم ـ صفحهٔ قائم عمود است بر صفحهٔ مقایسه . تصاویر تمام نقاط و خطوط واقع در صفحهٔ قائم ، بر فصل مشترك آن با صفحهٔ مقایسه قرار دارند .

تصویر هرشکلی که در صفحهٔ قائم باشد، خطی است مستقیم .

۱۰ ـ مسئله ـ وضع خط AB را نسبت به صفحهٔ P معین کنید .

حل ـ دو نقطه از خط ، مثلاً a و b را در نظر گرفته از رقوم آنها صرف نظر می‌کنیم و با فرض اینکه آن نقاط ، تصاویر دو نقطه از صفحه باشند ، رقوم آنها را بدست می‌آوریم و آن نقاط را m و n

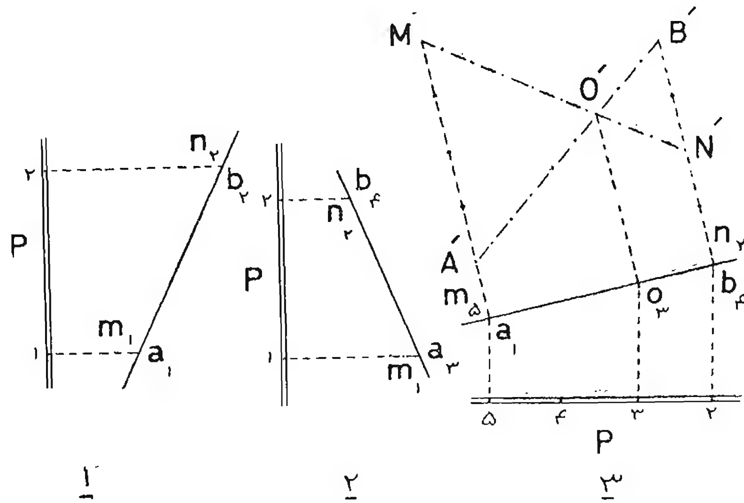
می‌نامیم . دو حالت ممکن است پیش آید :

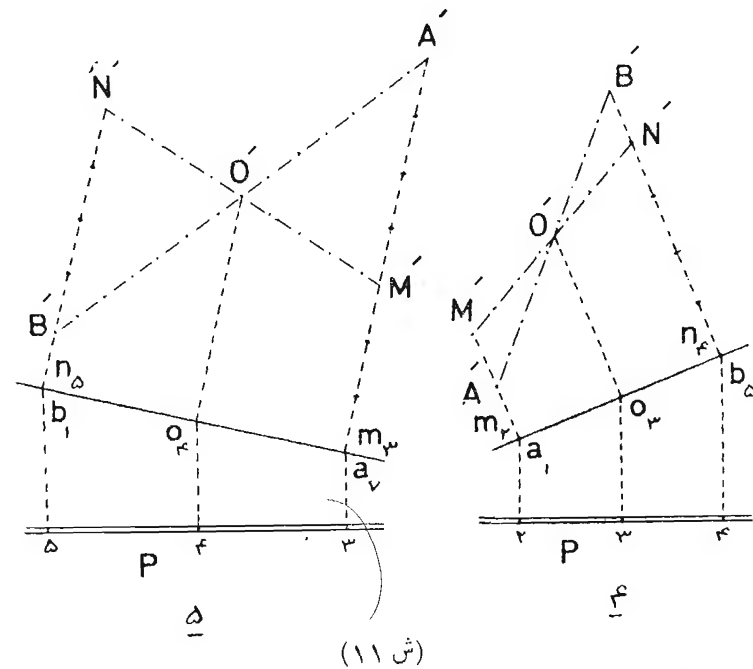
حالت اول ـ رقوم m با رقوم a و رقوم n با رقوم b مساوی است (مثلاً رقومهای a و m ، ۱ و رقومهای b و n ، ۲ باشند)؛ در این صورت ، a_1b_2 که دو نقطه‌اش در صفحهٔ P است ، در صفحهٔ P واقع است (شکل ۱۱ـ۱) .

حالت دوم ـ رقومهای m و n با رقومهای a و b اختلاف دارند؛ در این حالت یا :

الف ـ فراز a_3b_4 با فراز m_1n_2 مساوی است و ترقی رقوم آنها هم در یك جهت است ، یعنی دو خط a_3b_4 و m_1n_2 متوازیند ؛ پس خط a_3b_4 که با یکی ازخطوط صفحهٔ P موازی است باصفحهٔ P موازی است (شکل ۱۱ـ۲) .

ب ـ فراز AB با فراز MN مساوی و جهت ترقی رقومشان مخالف یکدیگراست (شکل۱۱ـ۳) ، یا اینکه فراز AB با فراز MN یکی نیست (شکل۱۱ـ۴ و ۵) ؛ پس دوخط که تصویرهایشان بر روی هم قرار دارند متقاطعند بنا بر این AB صفحهٔ P را قطع می‌کند . هرگاه صفحهٔ مصور دوخط راتسطیح‌کنیم، $A'B'$ و $M'N'$ ، تسطیحهای دوخط، یکدیگر را در O' قطع می‌کنند . o ترفیع O' را بدست می‌آوریم . چون این نقطه هم بر روی خط AB و هم بر روی صفحهٔ P است ، نقطهٔ تلاقی خط AB با صفحهٔ P است که می‌توان رقوم آن را روی AB یا روی صفحه معین کرد . در شکل ۱۱ـ۳ ، خط a_1b_4 صفحهٔ P را در نقطهٔ o_3 قطع کرده است .





(ش ۱۱)

۱۱ـ مسئله ـ از نقطهٔ a_3 واقع در صفحهٔ P خطی در این صفحه رسم کنید که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ α تشکیل دهد .

α است . در شکل ۱۳ ، بر دایره دو مماس رسم شده است و مسئله دو جواب دارد .

بحث ـ شرط وجود جواب این است که رسم مماس بر دایره میسر باشد . برای این کار، باید فراز خط از فراز صفحه بزرگتر یعنی شیبش ازشیب صفحه‌کوچکتر باشد. درحقیقت هیچیك ازخطهای صفحه‌نمی‌توانند با صفحهٔ مقایسه زاویه‌ای بسازد که از زاویهٔ صفحه با صفحهٔ مقایسه بزرگتر باشد .

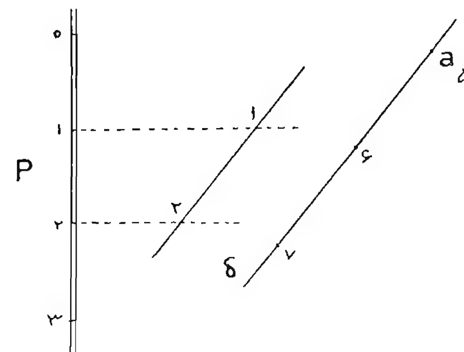
تمرین ـ خطی بدلخواه رسم‌کنیدکه با صفحهٔ افقی زاویهٔ $30°$ بسازد و بر آن صفحه‌ای بگذرانید که شیبش ۲ باشد . زاویهٔ حقیقی این صفحه را با صفحهٔ افق نمایش دهید .

اوضاع مختلف خط و صفحه

۱۳ـ موازی بودن خط و صفحه ـ شرط آنکه خطی باصفحه‌ای موازی باشد ، این است که با یکی از خطهای صفحه موازی باشد .

مثال ۱ ـ خط δ بر نقطهٔ a_5 گذشته و با صفحهٔ P موازی است و می‌خواهیم آن را مدرج کنیم :

در صفحهٔ P خطی موازی با δ می‌کشیم و



(ش ۱۴)

فراز آن را بدست می‌آوریم و از مبدأ **a** به اندازهٔ آن فراز بر روی خط δ جدا کرده خط را مدرج می‌کنیم بقسمی که ترقی رقوم دو خط مزبور در یك جهت باشد (شکل ۱۴) .

مثال ۲ـ می‌خواهیم از نقطهٔ **A** خطی به شیب **p** و موازی با صفحهٔ مفروض **P** رسم کنیم .

نخست در صفحهٔ **P** خطی به شیب **p** (به فراز $\frac{1}{p}$)رسم‌می‌کنیم و از **A** خطی به‌موازات آن می‌کشیم .

۱۴ـ موازی بودن دو صفحه ـ برای اینکه دو صفحه متوازی باشند ، باید دو خط متقاطع از یکی با دو خط متقاطع از صفحهٔ دیگر، موازی باشند . مثلاً افقیه‌های آنها باهم و بزرگترین شیبهایشان نیز باهم موازی باشند؛ اما شرط اخیر، یعنی متوازی بودن بزرگترین شیبها، متوازی بودن افقیه‌ها را ایجاب می‌کند ؛ پس :

شرط توازی دو صفحه این است که بزرگترین شیبهایشان متوازی باشند .

تمرین ـ از نقطهٔ a_5 صفحه‌ای به موازات صفحهٔ **P** بگذرانید و در آن از a_5 خطی به شیب $\frac{1}{3}$ رسم‌کنید.

۱۵ ـ عمودبودن خط و صفحه ـ قضیه ـ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد :

الف ـ تصویر خط با مقیاس شیب صفحه موازی می‌شود .

ب ـ فراز خط عکس فراز صفحه است .

ج ـ جهت ترقی رقوم روی تصویر خط و مقیاس شیب صفحه مخالف یکدیگر است .

برهان ـ الف ـ چون خط بر صفحه عمود است ، بر اثر آن نیز عمود است و تصویرش هم بر اثر صفحه عمود بوده و در نتیجه با مقیاس شیب صفحه موازی می‌شود .

ب ـ زاویهٔ α که خط با صفحهٔ مقایسه می‌سازد ، متمم β ، زاویهٔ بین صفحه و صفحهٔ مقایسه است ، یعنی $\alpha = ۹۰^\circ - \beta$ ؛ پس :

$$tg\alpha = cotg\beta = \frac{۱}{tg\beta}$$

و

$$cotg\alpha = tg\beta = \frac{۱}{cotg\beta}$$

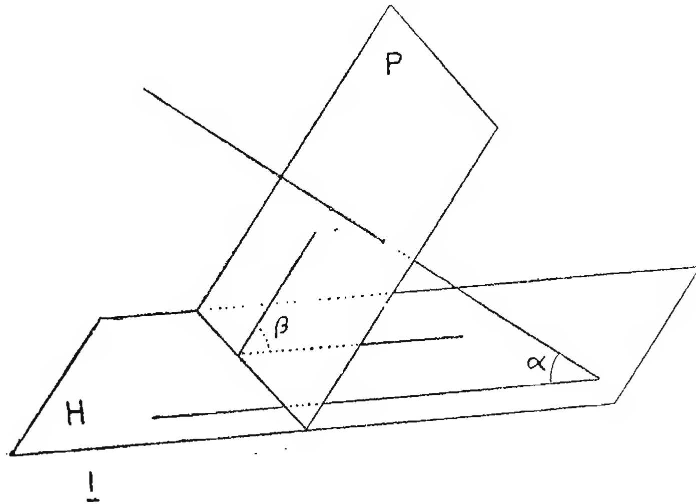
یعنی شیب و فراز خط، بترتیب عکس شیب و فراز صفحه می‌باشند.

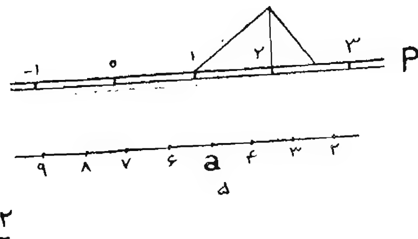
ج ـ اگر در روی مقیاس شیب، ترقی رقوم از چپ به‌راست باشد، روی تصویر خط ، ترقی رقوم از راست به‌چپ خواهد بود (شکل ۱۵ـ۱).

۱۶ ـ بسهولت می‌توان ثابت کرد که بعکس اگر تصویر خطی با مقیاس شیب صفحه‌ای موازی ، فراز خط عکس فراز صفحه و جهت ترقی رقوم روی تصویر خط و مقیاس شیب صفحه مخالف یکدیگر باشد ، خط بر صفحه عمود است .

پس اگر بخواهیم از نقطهٔ a_5 خطی بر صفحهٔ **P** عمود کنیم (شکل ۱۵ـ۲) ، نخست عکس فراز صفحه را می‌سازیم، آنگاه از **a** خطی موازی مقیاس شیب کشیده آن را از مبداء a_5 با فرازی مساوی عکس فراز صفحه و در جهت مخالف ترقی رقوم صفحه مدرج می‌کنیم .

همچنین اگر بخواهیم از نقطه‌ای یك صفحه برخطی عمود کنیم ، مقیاس شیب را موازی تصویر آن خط می‌کشیم و فراز آن را مساوی





(ش ۱۵)

عکس فراز خط قرار داده و در جهت مخالف ترقی رقوم خط مدرج می‌کنیم .

۱۷ ـ شرط عمود بودن صفحه‌ای بر صفحهٔ دیگر این است که یك خط یکی از آنها بر دیگری عمود باشد .

پس برای آنکه از نقطه‌ای صفحه‌ای به صفحهٔ **P** عمود کنیم ، از آن نقطه خطی بر صفحهٔ **P** عمود می‌کنیم ؛ هر صفحه که بر این خط بگذرد جواب مسئله است . مسئله جوابهای بیشمار دارد .

تمرین ۱ـ صفحهٔ P وخط Δ مفروضند. برخط Δ صفحه‌ای بگذرانید که برصفحهٔ P عمود باشد .

تمرین ۲ـ ازنقطهٔ مفروض A صفحه‌ای بگذرانید که باخط مفروض Δ موازی و بر صفحهٔ مفروض P عمود باشد .

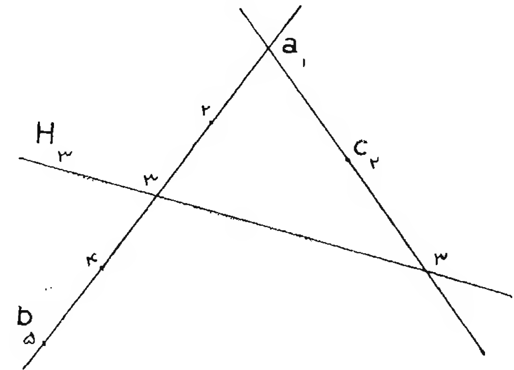
فصل مشترکها

۱۸ ـ فصل مشترك دو صفحه خطی است مستقیم . نخست فصل مشترك يك صفحه را با صفحات خاص بدست می‌آوریم ، سپس در حالت عمومی فصل مشترك دو صفحه را تعیین می‌کنیم .

۱۹ـ فصل مشترك يك صفحهٔ نا مشخص باياك صفحهٔ افقی‌ـ در این حال، فصل مشترك ، افقیه‌ای از صفحه است .

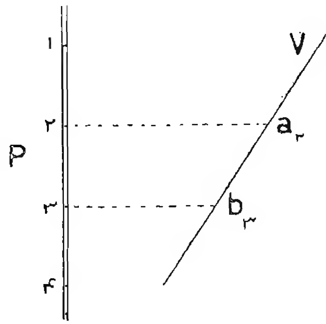
مثال ۱ـ فصل مشترك صفحهٔ P باصفحهٔ افقی رقوم ۵ ، افقیهٔ رقوم ۵ صفحهٔ P است .

مثال ۲ ـ اگرصفحه با دوخط متقاطع نموده شده باشد (شکل۱۶) و بخواهیم فصل‌مشترك آن را مثلاً با صفحهٔ افقی رقوم ۳ بدست آوریم ، نقاط رقوم ۳ از دو خط مزبور را به‌هم وصل می‌کنیم ؛ خط حاصل یعنی $H_۳$ فصل مشترك مطلوب است .



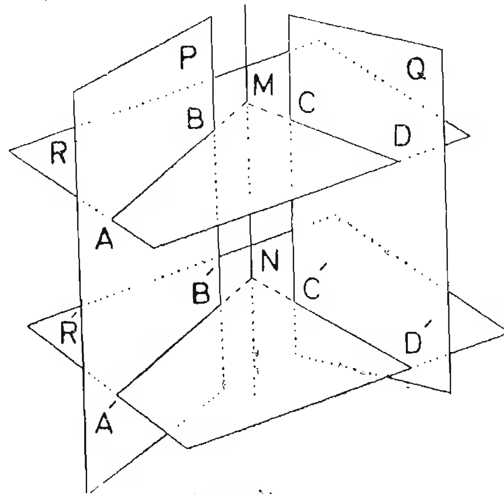
(ش ۱۶)

۲۰ـ فصل مشترك يك صفحه با صفحهٔ قائم ـ برای بدست آوردن فصل مشترك صفحهٔ P با صفحهٔ قائمی که V (شکل ۱۷) اثر آن است ، کافی است که V را خطی از صفحهٔ P فرض کرده آن را مدرج کنیم ؛ زیراکه تصویر فصل مشترك، بر V منطبق است . درشکل۱۷ ، $a_۲b_۳$ فصل مشترك دو صفحه است .



(ش ۱۷)

۲۱ـ حالت عمومی ـ هرگاه بخواهیم فصل مشترك دو صفحهٔ P و Q (شکل ۱۸) را بدست آوریم ، صفحهٔ سومی مانند R ، به نام صفحهٔ کمکی ، چنان اختیار می‌کنیم که هر دو صفحه را قطع کندو تعیین‌فصل‌مشترك صفحهٔ R باآنها آسان باشد. این‌فصل‌مشترکها را تعیین‌می‌کنیم(AB و CD)؛ AB و CD یکدیگر رادر نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند که متعلق به دوصفحهٔ P و Q است، یعنی روی فصل مشترك آنها واقع است. اگر صفحهٔ کمکی دیگری مانند R′ اختیار کنیم و به کمك آن نقطهٔ دیگری مانند N از فصل مشترك دو صفحه را بدست آوریم ، خط MN

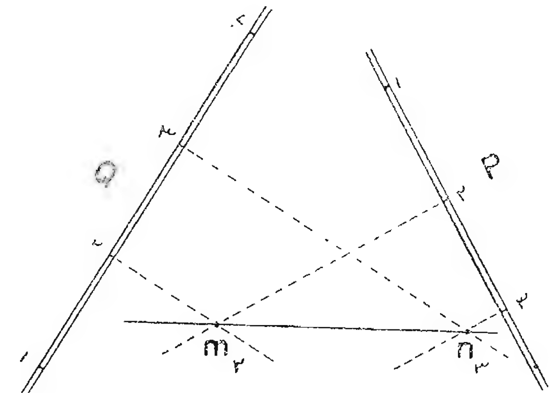


(ش ۱۸)

فصل مشترك مطلوب است .

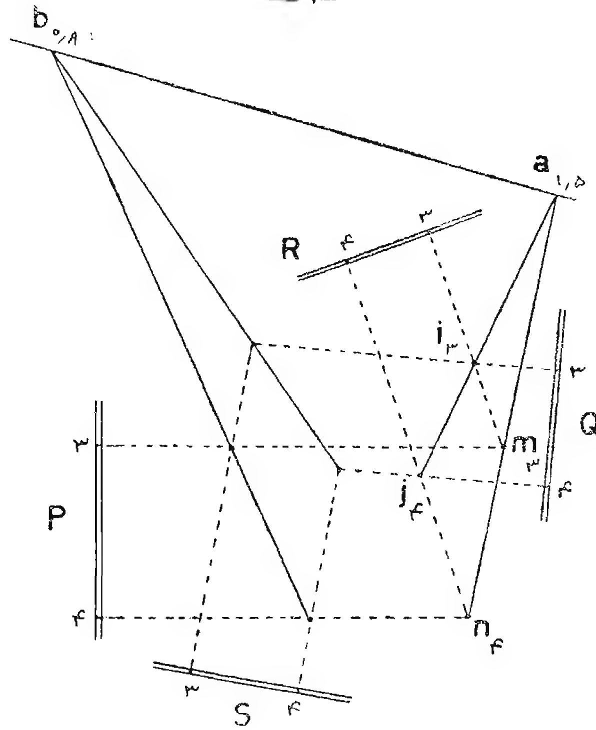
در هندسهٔ رقومی صفحات کمکی معمولاً افقی انتخاب می‌شوند.

۲۲ــ مثال ــ می‌خواهیم فصل مشترك دو صفحهٔ P و Q را تعیین کنیم (شکل ۱۹) . صفحهٔ افقی رقوم ۲ را کمکی اختیار می‌کنیم ؛ فصل مشترك این صفحه با صفحات P و Q افقیه‌های رقوم ۲ آنهاست ؛ این دو فصل مشترك یکدیگر را در نقطهٔ m_2 که یك نقطه از فصل‌مشترك دو صفحهٔ P و Q است قطع‌می کنند؛ همچنین‌صفحهٔ‌افقی رقوم ۳ را کمك می‌گیریم‌و نقطهٔ n_3 را که یك نقطهٔ دیگر‌از‌فصل‌مشترك دو‌صفحه‌است‌تعیین می‌کنیم ؛ خط m_2n_3 فصل مشترك دو صفحه است .



(ش ۱۹)

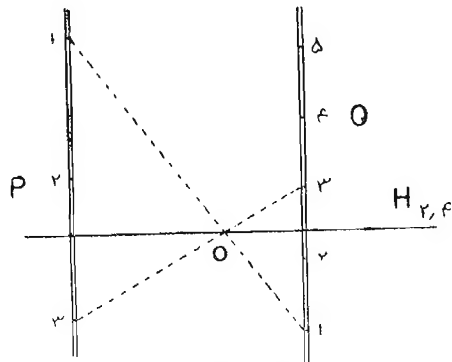
هرگاه افقیه‌های متحدالرقوم یکدیگر را در خارج حدود شکل قطع کنند ، ممکن است دو صفحهٔ کمکی غیر افقی مانند R و S (شکل ۲۰) اختیار کرده به کمك هریك از دو صفحهٔ مذکور ، یك نقطه از فصل مشترك مطلوب را بدست آورد . در شکل ۲۰ افقیه‌های رقوم ۳ صفحات P و R یکدیگر را در m_3 و افقیه‌های رقوم ۴ آنها یکدیگر را در n_4 قطع می‌کنند ؛ افقیه‌های مذکور از صفحهٔ R افقیه‌های همرقوم خود از صفحهٔ Q را بترتیب در i_3 و j_4 قطع می‌کنند ؛ دو خط m_3n_4 و i_3j_4 یکدیگر را در $a_{1/5}$ قطع می‌کنند ؛ پس $a_{1/5}$ یك نقطه از فصل



(ش ۲۰)

مشترك مطلوب است . به همین طریق نقطهٔ $b_{0/8}$ را به کمك صفحهٔ S بدست می‌آوریم ؛ $b_{0/8}$ $a_{1/5}$ فصل مشترك مطلوب است .

اگرمقیاس شیبهای دو صفحه متوازی باشند (شکل ۲۱)، چهار نقطه‌از آنهارا که دو بدو همرقوم باشند ، به هم وصل می‌کنیم تا یکدیگررا در o قطع‌کنند ؛ افقیه‌ای‌که بر o بگذرد، فصل‌مشترك‌دو صفحه

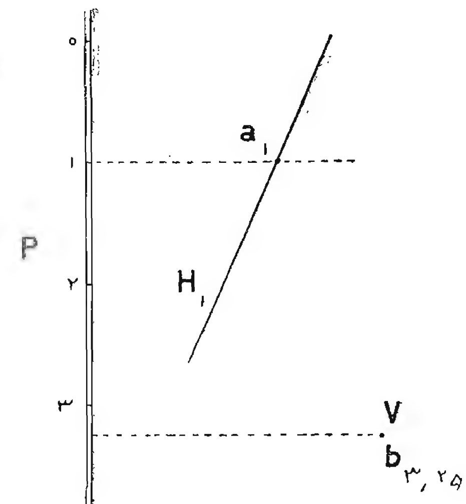


(ش ۲۱)

است؛ زیرا که : الف ـ می‌دانیم هرگاه بر دوخط متوازی دوصفحهٔ متقاطع بگذرانیم ، فصل مشترکشان با آن دو خط موازی است . نظر به اینکه افقیه‌های دو صفحه متوازیند ، فصل مشترکشان هم‌افقیه می‌شود . ب ـ خطوط واصل بین انتهای قطعات متناسب (یا متساوی) از دو خط متوازی ، از یك نقطه می‌گذرند (خطوط متقارب هندسهٔ سال چهارم) ؛ پس تصاویر افقیه‌هایی‌که نقاط همرقوم دومقیاس شیب را بهم وصل‌کنند ، از یك نقطه می‌گذرند وفصل مشترك دوصفحه هم‌که چنین افقیه‌ای است ، از همان نقطه مرور می‌کند .

تمرین ـ سه نقطهٔ a و b و c رئوس مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۶ هستند و رقومهای آنها بترتیب ۲ و۲ و ۵ است؛ فصل مشترك صفحهٔ $a_2b_2c_5$ را با صفحه‌ای که با مقیاس شیبش نمایش داده شده است ، بدست آورید .

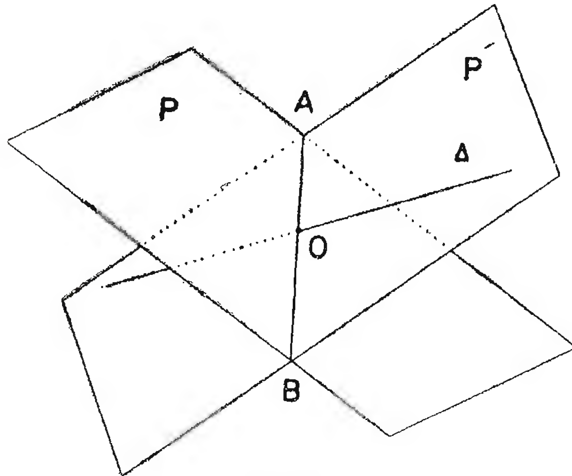
۴۳ـ فصل مشترك‌خط وصفحه ـ هرگاه‌خط ، افقی‌یا قائم‌باشد ، تعیین فصل‌مشترك بسیارساده‌است . **برای‌تعیین فصل مشترك‌یك‌خط افقی با یك صفحه ،** نقطهٔ تلاقی آن‌افقیه را با افقیهٔ‌همرقومش ازصفحه تعیین می‌کنیم . در شکل ۲۲ ، نقطهٔ a_1 فصل مشترك افقیهٔ H_1 باصفحهٔ P است .



(ش ۲۲)

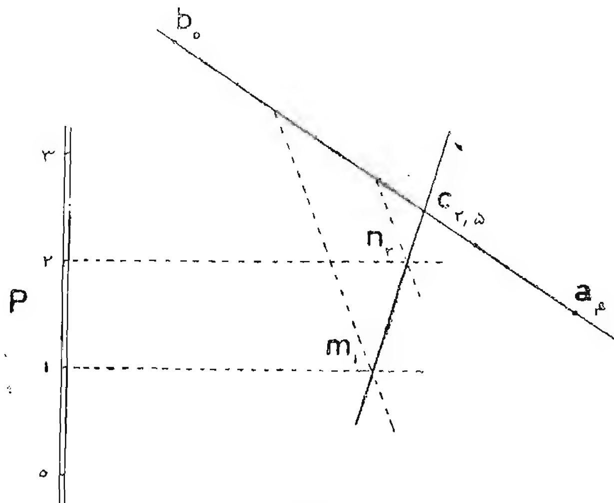
برای‌تعیین فصل مشترك یك‌خط قائم بایك‌صفحه ، تصویرخط قائم را نقطه‌ای از صفحه فرض کرده و رقوم آن‌را بدست می‌آوریم .در شکل ۲۲ ، نقطهٔ تلاقی قائم V با صفحهٔ P ، نقطهٔ $b_{3/25}$ است .

۴۴ـ حالت‌عمومی ـ برای‌آنکه‌فصل‌مشترك خط Δ را با صفحهٔ P بدست آوریم (شکل ۲۳) ، بر Δ یك‌صفحهٔ دلخواه‌مانند P′ ، می‌گذرانیم و خط AB ، فصل مشترك P′ را با صفحهٔ P تعیین‌می‌کنیم؛



(ش ۲۳)

AB و Δ که در صفحهٔ P′ هستند یکدیگر را در O تلاقی می‌کنند ؛



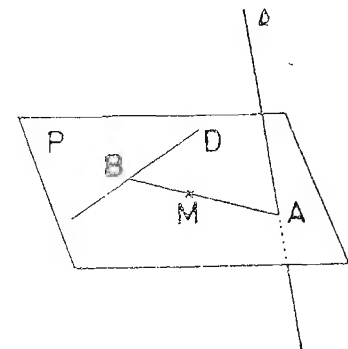
(ش ۲۴)

O فصل مشترك خط Δ و صفحهٔ P است .

مثلاً برای تعیین فصل مشترك خط a_4b_5 با صفحهٔ P (شکل۲۴)، برخط مزبور يك صفحهٔ كمكی (كه امتداد افقيه هايش را بدلخواه رسم می‌كنيم) می‌گذرانيم و m_1n_2 فصل مشترك دو صفحه را بدست می‌آوريم؛ هرجا a_4b_5 با فصل مشترك مذكور تلاقی كند ، همانجا محل برخورد خط و صفحه است . در شكل ۲۴ ، $c_{2/5}$ فصل مشترك خط و صفحه می‌باشد .

تمرين ـ از نقطهٔ a_5 عمودی برصفحهٔ P فرود آوريد وموقع عمود را معين كنيد .

۲۵ـ مسئله ـ دو خط Δ و D و نقطهٔ M داده شده‌اند . بر M خطی بگذرانيد كه آن دو خط را قطع كند ـ بر يكی از دوخط ، مثلاً D ، و نقطهٔ M صفحه‌ای مرور می‌دهيم تا Δ را در A قطع كند؛ AM كه با خط D دريك صفحه است ، آن را در B تلاقی می‌كند و AB خط مطلوب است (شكل ۲۵) .

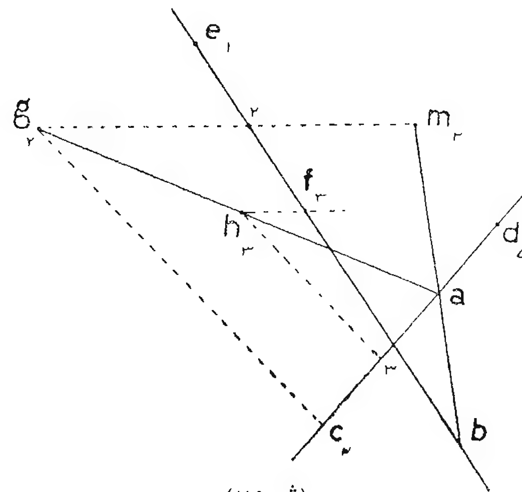


(ش ۲۵)

هرگاه Δ و D متنافر باشند ، مسئله يك جواب دارد و هرگاه Δ و D متقاطع يامتوازی باشند ، اگر M در صفحهٔ آنها باشد عدهٔ جوابها بيشمار است ، يعنی هر خطی كه درآن صفحه بر M بگذرد جواب مسئله است ، و اگر M درصفحهٔ آنها نباشد، مسئله يك جواب دارد . وقتی كه Δ و D متوازی باشند و M در صفحهٔ آنها

نباشد ، خط مطلوب با آنها موازی است .

ملخص ـ دوخط c_2d_5 و e_1f_3 و نقطهٔ m_2 مفروضند (شكل۲۶). صفحه‌ای بر m_2 و e_1f_3 می‌گذرد ؛ برای تعيين نقطهٔ تقاطع c_2d_5 با آن صفحه ، بر c_2d_5 صفحه‌ای گذرانده‌ايم و افقيه‌های رقوم ۲ و ۳ آن را



(ش ۲۶)

رسم كرده‌ايم تا افقيه‌های ۲ و ۳ صفحهٔ m_2 و e_1f_3 را در g_2 و h_3 قطع كرده‌اند؛ g_2h_3 فصل مشترك دوصفحه است و c_2d_5 را در a قطع می‌كند؛ خط am جواب مسئله است و با e_1f_3 در b تلاقی می‌كند .

تمرين ۱ـ سه خط متنافر Δ و ´Δ و ″Δ مفروضند . خطی رسم كنيد كه هرسه را قطع‌كند و به دو جزء متساوی تقسيم شود .

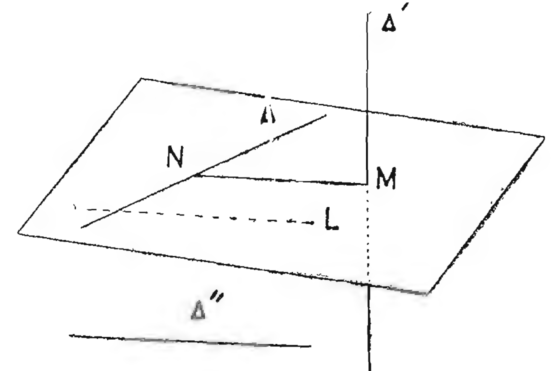
راهنمايی ـ بر Δ صفحه‌ای موازی ´Δ بگذرانيد ؛ از يك نقطهٔ دلخواه ´Δ به يك نقطهٔ دلخواه Δ وصل كنيد ؛ از وسط قطعه خطی‌كه به‌اين طريق بدست می‌آيد ، صفحه‌ای به موازات آن صفحه مرور دهيد تا ″Δ را در M قطع كند و خط مطلوب را از M بقسمی بگذرانيد كه Δ و ´Δ را قطع كند .

تمرین ۳ـ سه خط متنافر Δ و ´Δ و "Δ و نقطهٔ A داده شده‌اند . متوازی‌الاضلاع ABCD را چنان بسازید که مرکزش بر خط Δ و دو رأس B و D آن بر ´Δ و "Δ باشند .

راهنمایی ـ اول O مرکز و دو رأس مقابل B و D را با استفاده از تمرین قبل بدست می‌آوریم ؛ بعد از A به O وصل کرده C را تعیین می‌کنیم .

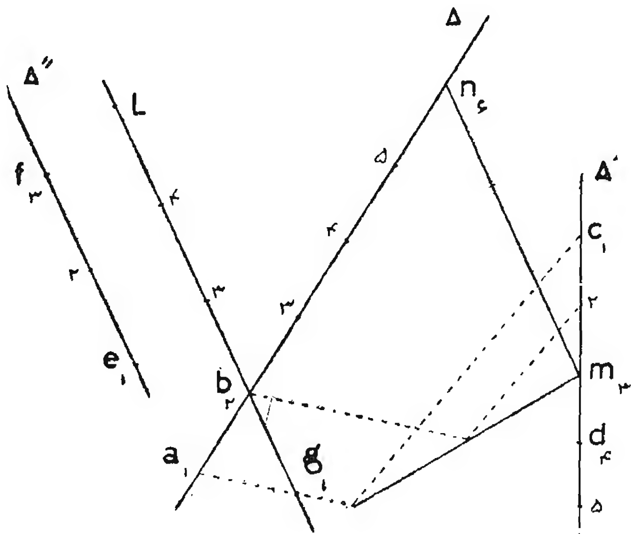
۲۶ ـ مسئله ـ سه خط متنافر Δ و ´Δ و "Δ مفروضند ؛ خطی موازی "Δ رسم کنید که Δ و ´Δ را قطع کند .

بر Δ صفحه‌ای به موازات "Δ مرور می‌دهیم به این ترتیب که از یك نقطهٔ خط Δ خط L را موازی "Δ رسم می‌کنیم و بر Δ و L صفحه‌ای می‌گذرانیم؛ این صفحه خط ´Δ را در M قطع می‌کند . از M خط MN را موازی "Δ می‌کشیم تا Δ را در N قطع کند؛ MN خط مطلوب است (شکل ۲۷) .



(ش ۲۷)

ملخص ـ سه خط a_1b_2 و c_1d_4 و e_1f_3 داده شده‌اند (شکل ۲۸) ؛ از b_2 خط b_2g_1 را موازی e_1f_3 رسم کرده‌ایم و به این ترتیب بر AB صفحه‌ای موازی EF گذرانده‌ایم . این صفحه خط c_1d_4 را در m_3 قطع کرده است . (برای بدست‌آوردن m_3 از افقیه‌های ۱ و ۲ صفحهٔ کمکی استفاده شده است) . از m_3 خطی موازی e_1f_3 کشیده‌ایم تا a_1b_2 را در n_6 تلاقی کرده است ؛ خط m_3n_6 جواب مسئله است .



(ش ۲۸)

تمرین ـ مسئلهٔ قبل را در حالتی‌که Δ غیرمشخص و ´Δ افقی و "Δ قائم باشد، حل کنید .

۲۷ـ مسئله ـ از نقطهٔ مفروض A خطی موازی صفحهٔ P رسم کنید تا خط Δ را قطع کند .

حل ۱ـ از A صفحه‌ای موازی P می‌گذرانیم تا Δ را در M قطع کند ؛ AM جواب مسئله است .

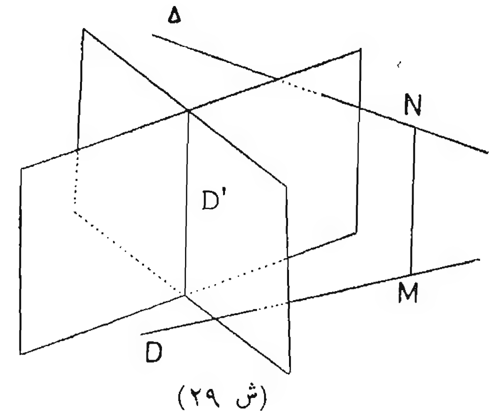
حل ۲ـ از A خطی موازی Δ رسم می‌کنیم ، فصل مشترکهای آن خط و Δ را با صفحهٔ P بدست می‌آوریم ، دوفصل مشترك را به‌هم وصل می‌کنیم ، و از A خطی موازی خط واصل می‌کشیم .

تمرین ـ مسئلهٔ ۲۷ را از هردو راه رسم کنید .

۲۸ـ تعریف ـ عمود مشترك دو خط متنافر ، خطی است که آنها را قطع کند و برهر دو عمود باشد .

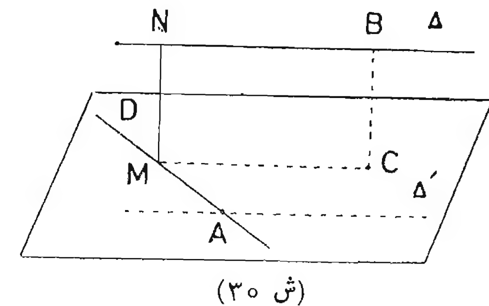
۲۹ ـ مسئله ـ عمود مشترك دو خط متنافر Δ و D را رسم کنید .

راه اول ـ دو صفحهٔ اختیاری بر Δ و D عمود می‌کنیم (شکل ۲۹) و D´ فصل مشترك آنها را بدست می‌آوریم ؛ سپس خطی مانند MN به موازات D´ رسم می‌کنیم که Δ و D را قطع کند .



(ش ۲۹)

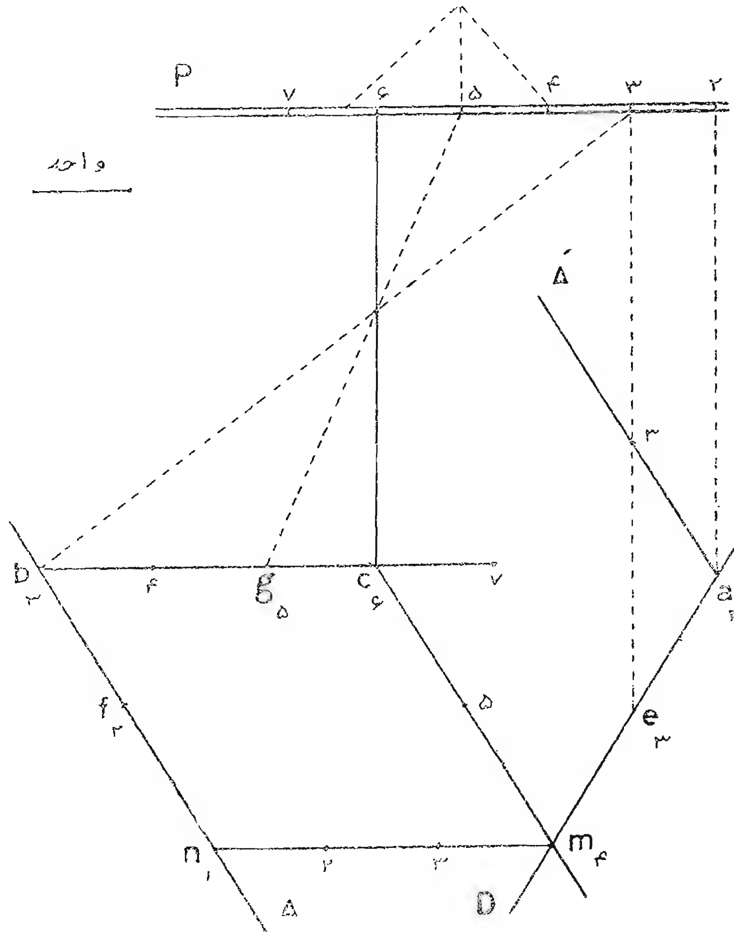
راه دوم ـ از نقطهٔ A واقع بر D خط Δ´ را موازی Δ رسم می‌کنیم ؛ صفحه‌ای که بر D و Δ´ می‌گذرد با Δ موازی است ؛ از نقطه‌ای مانند B از خط Δ عمودی بر صفحهٔ مذکور فرود آورده C موقع آن را بدست می‌آوریم ؛ از C خطی موازی Δ می‌کشیم تا D را در M قطع کند ؛ MN را موازی CB رسم می‌کنیم ؛ این خط عمود مشترك مطلوب است (شکل ۳۰) .



(ش ۳۰)

ملخص ـ دو خط D و Δ یا $a_{2}e_{3}$ و $b_{3}f_{2}$ داده شده‌اند (شکل ۳۱) . از a_{2} خط Δ´ را موازی Δ کشیده‌ایم و بر دو خط D و Δ´ صفحهٔ P را گذرانیده و فرازآن و عکس فرازآن را رسم کرده‌ایم ؛ از b_{3} خط $b_{3}g_{5}$ را بر P عمود کرده و c_{6} موقع عمود را

یافته‌ایم ؛ از c_{6} خطی موازی $b_{3}f_{2}$ کشیده‌ایم تا D را در m_{4} قطع کرده است ؛ از m_{4} خطی موازی $c_{6}b_{3}$ کشیده‌ایم تا Δ را در n_{1} تلاقی کرده است ؛ $m_{4}n_{1}$ ملخص عمود مشترك دو خط D و Δ است .



(ش ۳۱)

تمرین ۱ـ خطهای D و Δ را مجدداً رسم کنید وعمود مشترك آنهارا از راه اول بدست آورید.

تمرین ۲ـ عمود مشترك دو خط را درحالتهای خاص زیررسم کنید :

الف ـ اولی قائم و دومی افقی باشد . ب ـ یکی قائم و دیگری غیر مشخص باشد. ج ـ یکی افقی و دیگری غیرمشخص باشد . د ـ هر دو قائم یا هردو افقی باشند .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ـ صفحه با سه نقطهٔ غیر واقع بریك استقامت نمایش داده می‌شود ؛ یا با یك خط ویك نقطهٔ خارج ازآن ؛ یا با دو خط متقاطع ؛ یا با دو خط متوازی .

۲ـ برای مدرج کردن خطی از صفحه ، رقوم نقاط برخورد آن را با دو خط صفحه معین می‌کنیم .

۳ـ برای تعیین رقوم یك نقطه از صفحه‌که تصویرش داده شده باشد، ازآن نقطه خط دلخواهی در آن صفحه می‌گذرانیم و آن را مدرج می‌کنیم و رقوم نقطه را روی‌آن خط بدست می‌آوریم .

۴ـ افقیه‌های صفحه همه باهم موازی هستند .

۵ـ خط بزرگترین شیب صفحه عمود است برافقیه‌ها . این‌خط بتنهایی برای نمایش صفحه کافی است ؛ زیراکه امتداد افقیه‌ها را بدست می‌دهد وبه مناسبت اهمیتی‌که این‌خط دارد، تصویرمدرج‌آن را با دوخط متوازی نمایش می‌دهند و مقیاس شیب صفحه می‌خوانند .

۶ـ برای آنکه از نقطهٔ مفروضی ازیك صفحه خطی درآن صفحه رسم کنیم‌که شیب معینی داشته باشد ، فراز خط مطلوب را می‌سازیم و نقطهٔ داده شده را مرکز قرار داده با شعاعی مساوی فراز خط مطلوب دایره‌ای می‌زنیم تا افقیه‌ای از صفحه راکه اختلاف رقوم‌آن بارقوم نقطهٔ مفروض ۱ باشد قطع کند ، از نقطهٔ مفروض به نقطهٔ تقاطع وصل می‌کنیم .

۷ـ برای آنکه برخطی صفحه‌ای به‌شیب معینی مرور دهیم، به مرکز تصویر یکی از نقاط خط و با شعاعی مساوی فراز صفحهٔ مطلوب ، دایره‌ای می‌زنیم و از تصویر نقطه‌ای از خط‌که رقومش از رقوم مرکز دایره یك واحد

بیشترباشد، مماسی بردایره رسم می‌کنیم؛ این‌مماس افقیهٔ صفحهٔ مطلوب است.

۸ـ برای اینکه خطی با صفحه‌ای موازی باشد، باید بایکی‌ازخطهای آن موازی باشد .

۹ـ برای اینکه دو صفحه متوازی‌باشند، باید دو خط متقاطع یکی با دو خط متقاطع دیگری موازی باشد ؛ یا کافی است مقیاس شیبهای دو صفحه متوازی باشند ؛ زیراکه افقیه‌های‌آنها نیز متوازی خواهند شد .

۱۰ـ اگرخطی برصفحه‌ای عمود باشد : الف ـ تصویرش بامقیاس شیب صفحه موازی است . ب‌ـ فرازش عکس فراز صفحه است . ج‌ـ ترقی رقومش درجهت مخالف ترقی رقوم مقیاس شیب صفحه است .

البته وقتی‌که خطی برصفحه‌ای عمود باشد، صفحه نیز برخط عموداست.

۱۱ـ برای تعیین فصل مشترك دو صفحه ، دو افقیهٔ همرقوم آنها را رسم‌می‌کنیم تا ازتقاطع‌آنها یك نقطه از فصل مشترك بدست‌آید؛ نقطهٔ دیگری از فصل مشترك را هم به وسیلهٔ رسم دو افقیهٔ همرقوم دیگر بدست می‌آوریم و فصل مشترك را رسم می‌کنیم .

اگر افقیه‌های دو صفحه یکدیگر را خیلی دور (یعنی خارج از حدود شکل) قطع‌کنند ، دوصفحهٔ‌کمکی اختیار می‌کنیم وبه‌کمك هریك از آنها یك نقطه از فصل مشترك را بدست می‌آوریم .

اگرمقیاس شیب دوصفحه ، و در نتیجه افقیه‌های‌آنها ، متوازی‌باشند، چهار نقطهٔ دوبدو همرقوم از دو مقیاس شیب را بههم وصل می‌کنیم تایکدیگر را قطع‌کنند؛ افقیه‌ای‌که از نقطهٔ تقاطع، عمود برمقیاس شیبهای دوصفحه رسم شود ، فصل مشترك مطلوب است .

۱۲ـ برای تعیین‌فصل‌مشترك‌خط وصفحه ، برخط صفحه‌ای می‌گذرانیم وفصل مشترك‌آن را با صفحهٔ مفروض پیدا می‌کنیم؛ نقطهٔ تقاطع فصل مشترك با خط مفروض، نقطهٔ تقاطع‌آن خط باصفحه است .

تمرین

۱ـ صفحه‌ای به وسیلهٔ سه نقطهٔ a_1 و b_2 و c_5 داده شده است . خطی از صفحه را که تصویرش بروسط ab و بر نقطه‌ای از ac به فاصلهٔ $\frac{ac}{3}$ از a می‌گذرد مدرج کنید .

۲ـ در مثلث $a_1b_2c_5$ میانه‌ها را بکشید وآنها را مدرج کنید .

۳ـ رقوم نقطهٔ تلاقی میانه های مثلث $m_1n_5p_6$ را بدست آورید و تحقیق کنیدکه مساوی $\frac{1}{3}$ مجموع رقومهای سه رأس مثلث است .

۴ـ مقیاس شیب صفحهٔ مثلث $a_2b_3c_4$ را رسم کنید .

۵ـ افقیهٔ H_5 ونقطهٔ a_3 داده شده‌اند. مثلث متساوی‌الساقینی بسازید که رأسش a_3 وقاعده‌اش روی H_5 وطول قاعده‌اش ۴ باشد .

۶ـ صفحهٔ P را به‌شیب $\frac{1}{2}$ رسم‌کنید. دراین‌صفحه نقطهٔ a_4 را اختیار کنید وبرآن، دوخط ، اولی به شیب $\frac{1}{3}$ و دومی به‌شیب $\frac{2}{5}$ مرور دهید .

۷ـ درمسئلهٔ ۶، مثلثی‌بسازیدکه رأسش a_4 باشد و دوضلع آن روی دو خطی باشندکه رسم‌کرده‌اید وضلع سومش خطی‌افقی به‌طول ۶ باشد .

۸ـ خط a_2b_5 را به شیب $\frac{1}{2}$ رسم کنید و برآن صفحه‌ای بگذرانید که شیبش ۱/۵ باشد .

۹ـ برخط مفروض m_3n_7 صفحه‌ای بگذرانیدکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۷۵° بسازد .

۱۰ـ برنقطهٔ a_3، صفحه‌ای به‌شیب $\frac{1}{3}$ بگذرانید بقسمی که افقیه‌هایش با امتداد مفروضی موازی باشند .

۱۱ـ بر نقطهٔ b_4 صفحه‌ای بگذرانید که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵° بسازد و اثرآن با امتداد معلومی زاویهٔ α تشکیل دهد .

۱۲ـ در صفحهٔ P خط a_2b_5 را به‌شیب $\frac{1}{2}$ رسم کنید . بعد بر نقطهٔ مفروض m_6 واقع درخارج صفحهٔ P صفحه‌ای مرور دهیدکه فصل مشترکش با P خط a_2b_5 باشد ؛ آیا می‌توانید زاویهٔ این صفحه را با صفحهٔ مقایسه بدست‌آورید ؟

۱۳ـ سه نقطهٔ a_2 وb_2 وc_4 ودونقطهٔ d و e تصاویر دونقطه ازصفحهٔ ABC داده شده‌اند. رقوم d و e را پیداکنید (a ، b ، c ، d و e یك پنج ضلعی تشکیل می‌دهند) .

۱۴ـ سه نقطهٔ a_2 و b_5 و c_5 با نقطهٔ d چهار رأس یك چهار ضلعی هستند . قطر bd را مدرج کنید .

۱۵ـ فصل‌مشترك دوصفحه را دراین حالتها بدست‌آورید :

الف- یکی‌قائم ودیگری باسه‌نقطه مشخص شده‌باشد .

ب- یکی افقی ودیگری بامقیاس شیبش معین شده‌باشد .

ج- هردو بامقیاس شیب نمایش داده شده باشند .

د- هردو با سه نقطه مشخص شده باشند .

۱۶ـ فصل مشترك خط وصفحه را در این حالتها بدست‌آورید :

الف- خط‌قائم وصفحه افقی‌باشد .

ب- خط قائم وصفحه باسه نقطه مشخص شده‌باشد .

ج- خط افقی وصفحه بامقیاس شیب داده شده‌باشد .

د- خط غیرمشخص وصفحه قائم‌باشد .

هـ- خط وصفحه هردو غیرمشخص باشند .

۱۷ـ دو خط a_1b_5 و c_2d_7 داده شده‌اند. بر c_2d_7 صفحه‌ای موازی a_1b_5 بگذرانید .

۱۸ـ ازنقطهٔ m_4 صفحه‌ای موازی دوخط a_1b_5 و c_5d_7 بگذرانید.

۱۹ـ نقطهٔ A وخط D وصفحهٔ P داده شده‌اند. از A خطی رسم‌کنید که موازی صفحهٔ P باشد و خط D را قطع‌کند .

۲۰ـ افقیه‌ای رسم‌کنیدکه دوخط متنافررا قطع‌کند وتصویرش باامتداد معلومی ازصفحهٔ مقایسه زاویهٔ معین α بسازد .

فصل چهارم

تسطیح

۱ـ بطوری‌که درآغازکتاب گفتیم ، هدف هندسهٔ رقومی و هندسهٔ ترسیمی، نمایش اشکال‌است بقسمی‌که ازروی تصاویرآنها به‌اندازهٔ حقیقی ابعاد واجزای مختلفشان بتوان پی‌برد . این‌کار در صورتی میسر است‌که صفحهٔ شکل با صفحهٔ تصویر موازی باشد . اگر صفحهٔ شکل موازی با صفحهٔ مقایسه نباشد ، ممکن است آن را در حول محوری آنقدر دوران دهیم تا با صفحهٔ تصویر موازی شود .

بطوری‌که می‌دانید وقتی‌که جسمی دوران‌کند (مانند دری‌که در حول لولاهای خود باز و بسته می‌شود) ، خط مستقیمی‌که جسم در حول آن دوران می‌کند و **محوردوران** نام دارد ، تغییر نمی‌کند ؛ یعنی‌نقاطی که برآن قرار دارند ثابت می‌مانند ؛ اما هر نقطهٔ دیگر در روی صفحه‌ای عمود برمحور ، قوسی از دایره ، مساوی **زاویهٔ دوران** طی می‌کند ، و زاویهٔ دوران برای تمام نقاط جسم یکی است .

۲ـ در هندسهٔ‌رقومی هرگاه صفحهٔ شکلی‌را درحول محوری‌آنقدر دوران دهیم تا با صفحهٔ مقایسه موازی شود ، می‌گوییم آن را **تسطیح**

کرده‌ایم . وقتی‌که صفحه پس از تسطیح موازی صفحهٔ مقایسد شود ، همهٔ خطوط آن ، از جمله محور ، افقی خواهند شد ؛ چون محور دوران ثابت و تغییر ناپذیر است ، باید پیش از دوران هم افقی باشد . بنابراین **محور تسطیح همیشه یکی از افقیه‌های صفحهٔ شکل اختیار می‌شود .**

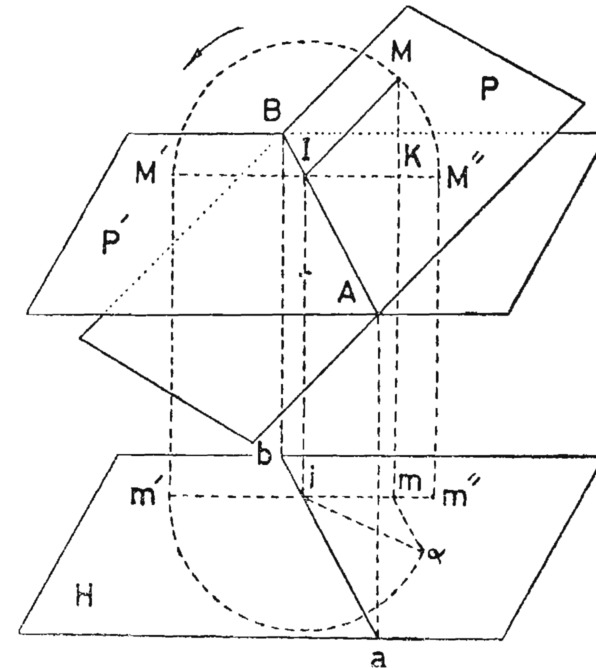
۳ـ مقصود از تسطیح یك صفحه ، دوران دادن آن است در حول یکی از افقیه هایش تا با صفحهٔ مقایسه موازی ، یا برآن منطبق شود . محور دوران را **لولا** می‌نامیم . هرگاه صفحه‌ای را در حول لولایی افقی به ارتفاع h تسطیح کنیم ، می‌گوییم که آن صفحه را برصفحهٔ افقی به ارتفاع h تسطیح کرده‌ایم ؛ هرگاه لولا اثر افقی صفحه باشد ، صفحه بر صفحهٔ مقایسد تسطیح می‌شود .

۴ ـ تسطیح صفحه به‌موازات صفحهٔ مقایسه ـ فرض می‌کنیم‌که صفحهٔ P را درحول لولای افقی AB تسطیح‌کرده به‌وضع P' که موازی با صفحهٔ مقایسهٔ H است ، درآورده باشیم (شکل ۱) . هر نقطه مانند M از صفحهٔ P در روی دایره‌ای‌که صفحه‌اش بر لولا عمود است و لولا را در I قطع می‌کند و مرکزش I و شعاعش مساوی با فاصلهٔ I از M است دوران می‌کند و به وضع M' تسطیح می‌شود . اگر m تصویر افقی M و m' تصویر افقی M' باشد ، m' را تسطیح نقطهٔ m می‌گوییم .

حال ببینیم m' چطور بدست می‌آید :

الف ـ اگر ab تصویر لولای افقی AB و i تصویر I باشد ، ab موازی است با AB و mi عمود است بر ab ($\widehat{mia}$ تصویر زاویهٔ قائمه‌ای است‌که یك ضلعش با صفحهٔ تصویر موازی است) ؛ به‌دلیل مشابه ، im'

عمود است بر ab ؛ پس im´ و im برامتداد یکدیگرند، یعنی **تسطیح هرنقطه برروی عمودی است که از تصویر نقطه برتصویر لولا فرود آید.**

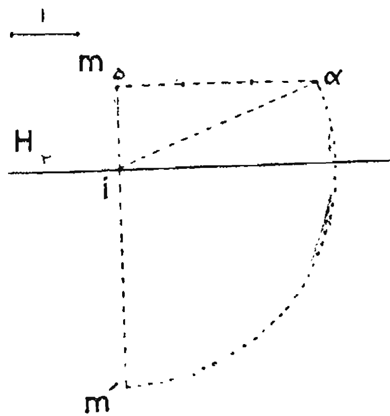


(ش ۱)

ب ـ IM = IM´ = im´ ؛ اما IM وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ IKM است که یك ضلعش KM ، مساوی اختلاف رقوم نقطه و لولاست و ضلع دیگرش IK = im ، یعنی مساوی فاصلهٔ تصویر نقطه است از تصویر لولا؛
پس فاصلهٔ تسطیح هر نقطه از تصویرلولا مساوی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که یك ضلعش مساوی فاصلهٔ تصویر نقطه از تصویر لولا وضلع دیگرش مساوی اختلاف رقوم نقطه ولولا باشد.
بنا براین هرجا مثلثی با این شرایط بسازیم، وترش مساوی im´ خواهد بود. مناسب‌ترین جا برای ساختن مثلث، صفحهٔ مقایسه است؛ به این ترتیب که از m ، تصویر نقطه، خطی موازی تصویر لولا می‌کشیم

(شکل ۱) و طولی مساوی اختلاف رقوم نقطه و لولا برآن جدا می‌کنیم تا نقطهٔ α بدست‌آید و از i به α وصل می‌کنیم؛ مثلث imα مساوی مثلث IKM است و اگر به مرکز i و شعاع iα دایره‌ای روی صفحهٔ مقایسه رسم‌کنیم بر m´ می‌گذرد.

مثلاً **برای تسطیح نقطهٔ M_5 درحول لولای افقی H_2 (شکل ۲)، از m، تصویر نقطه، عمود mi را بر H (تصویر لولا) فرود آورده امتداد می‌دهیم؛ سپس از m خطی موازی H رسم‌کرده طول mα را مساوی ۳ (اختلاف رقوم نقطهٔ m_5 ولولای H_2) برآن جدا می‌کنیم وبه مرکز i وشعاع iα قوسی می‌زنیم تا امتداد mi را در m´ قطع کند؛ m´ تسطیح M است.**



(ش ۲)

مثلث imα را **مثلث تسطیح** و زاویهٔ miα را **زاویهٔ تسطیح** و قاعده‌ای را که گفته شد، **قاعدهٔ مثلث قائم‌الزاویه** می‌گوییم. زاویهٔ تسطیح مساوی است با مسطحهٔ فرجهٔ بین صفحهٔ شکل و صفحهٔ مقایسه.

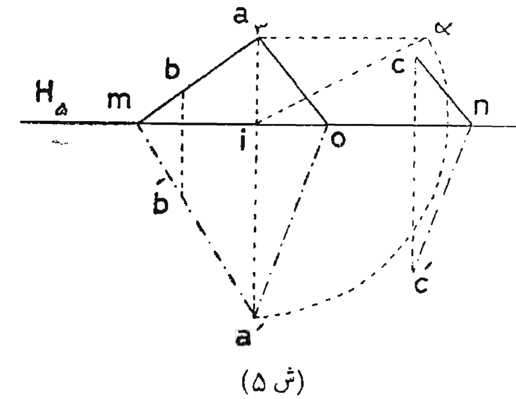
۵ـ باتوجه به شکل ۱ این نکات را بخاطر بسپارید:

الف ـ برحسب جهتی که برای دوران قائل شویم، M را می‌توان درهریك از دو طرف لولا تسطیح کرد.

ب ـ تسطیح نقاطی‌که بر روی لولا باشند، برخود آنها منطبق‌است.

ج ـ تمام شکلهایی‌که نسبت به لولا دریك نیمهٔ صفحهٔ P هستند، در یك طرف لولا تسطیح می‌شوند و کلیهٔ شکلهای واقع درنیمهٔ دیگر،

می‌توانیم هر نقطه از صفحه را که تسطیحش مثلاً b' دردست باشد، ترفیع کنیم . برای ترفیع نقطه نیز از ترفیع نقطهٔ کمکی یا از ترفیع خط کمکی استفاده



(ش ۵)

می‌کنیم . در شکل ۵ اگر b' تسطیح نقطه‌ای باشد و بخواهیم آن را ترفیع کنیم ، از b' به a' (تسطیح نقطهٔ a) وصل‌کرده امتداد می‌دهیم تا لولا را در m قطع‌کند . نقطهٔ تقاطع ma با عمودی که از b' بر لولا فرود آید ترفیع b' است که آن را b می‌نامیم[1] . هرگاه بخواهیم نقطهٔ دیگری مانند c' را ترفیع کنیم و خط $c'a'$ لولا را در خارج از حدود شکل قطع کند ، c' را به کمك یك خط ترفیع می‌کنیم ، یعنی از a' خطی می‌کشیم تا لولا را در o قطع‌کند و از o به a وصل می‌کنیم و از c' موازی $a'o$ می‌کشیم تا لولا را در n تلاقی کند و از n خطی موازی ao رسم می‌کنیم تاعمودی را که از c' بر لولا فرود آمده است در c قطع کند ؛ c ترفیع c' است (شکل ۵) .

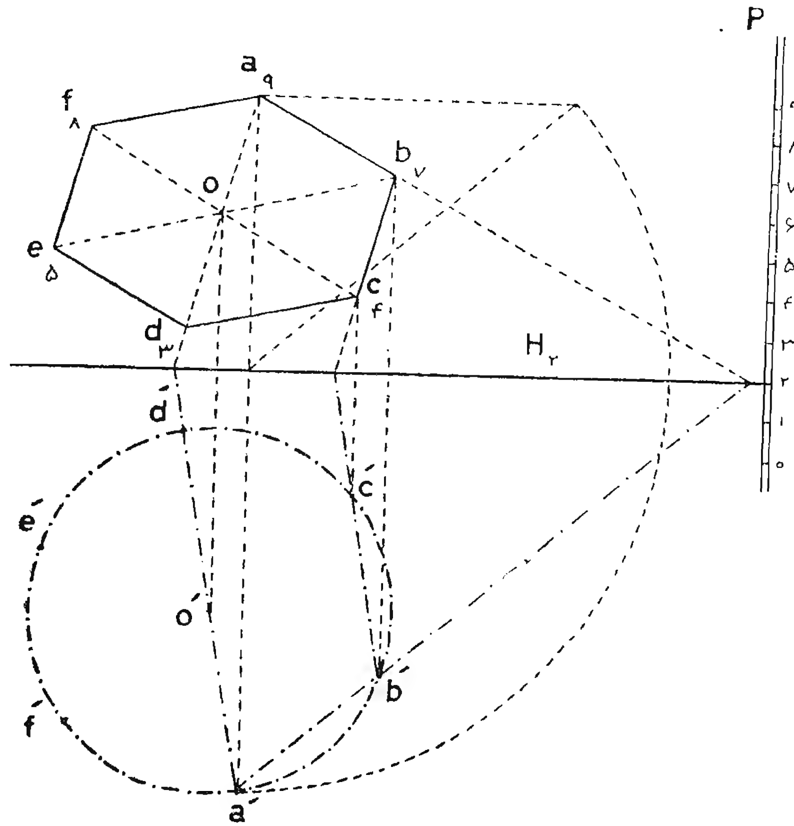
تمرین ۱ـ لولای H_5 و a تصویر یك نقطه و a' تسطیح آن در حول H_5 داده شده‌اند . رقوم نقطهٔ A را بدست‌آورید .

۱ـ توجه داشته باشید که رقوم نقطهٔ b داده نشده است؛ زیرا که چون نقطهٔ b درصفحهٔ مار بر a_3 و H_5 واقع است، رقوم آن را بدلخواه نمی‌توان اختیار کرد بلکه باید آن را در صفحهٔ مذکور بدست آورد . ولی چون از رقوم نقطهٔ b برای تسطیح آن استفاده نمی‌شود ، بدست‌آوردن آن ضرورتی ندارد .

تمرین ۲ـ افقیهٔ H_4 و a' تسطیح نقطه‌ای ازصفحهٔ P داده شده‌اند؛ صفحهٔ P باصفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ °۶۰ می‌سازد؛ ترفیع a' و رقوم آن را بدست‌آورید .

۸ـ مثال ـ خط افقی H_2 و نقطهٔ a_9 و نقطهٔ o که درصفحهٔ a_9H_2 است داده شده‌اند . a_9 رأس و o مرکز شش‌ضلعی منتظمی است که در صفحهٔ a_9H_2 قرار دارد ؛ می‌خواهیم شش‌ضلعی را بسازیم .

a_9 را درحول لولای H_2 به‌کمك مثلث قائم‌الزاویه در a' و o را به‌کمك a_9 در o' تسطیح می‌کنیم (شکل ۶). به مرکز o' و شعاع $o'a'$



(ش ۶)

دایره‌ای رسم می‌کنیم و ابتدا از a' شش قوس متوالی که طول وتر آنها مساوی $o'a'$ باشد رسم می‌کنیم تا نقاط b' ، c' ، d' ، e' ، f' بدست آیند. b' و c' را در b و c ترفیع می‌کنیم. ao و bo و co را به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا بترتیب نقاط d و e و f بدست آیند. رقوم رئوس شکل را به‌کمك افقیه‌های صفحهٔ a_1H_2 بدست می‌آوریم.

تمرین ۳ـ o_3 مرکز و a_2 یك رأس مثلث متساوی الاضلاعی است‌که امتداد افقیه‌های صفحه‌اش با تصویر a_2o_3 زاویهٔ ۳۵° می‌سازد. مثلث را بسازید.

خلاصهٔ مطالب مهم:

۱ـ برای تعیین طولها وزاویه‌های حقیقی یك‌شکل مستوی صفحهٔ آن‌را به موازات صفحهٔ مقایسه یا برصفحهٔ مقایسه تسطیح می‌کنیم.

۲ـ تسطیح‌کردن یك‌صفحه یعنی آن‌صفحه را درحول یك‌لولای افقی‌دوران دهند تا باصفحهٔ مقایسه موازی شود. زاویهٔ دوران را زاویهٔ تسطیح‌گویند.

۳ـ اگر رقوم لولای دوران صفر باشد، صفحه برصفحهٔ مقایسه تسطیح می‌شود و در غیر این صورت به‌موازات آن تسطیح خواهد شد.

۴ـ تسطیح هر نقطه واقع است برعمودی‌که از تصویر آن برتصویر لولا فرود آید وفاصلهٔ تسطیح از لولا مساوی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است‌که یك ضلعش مساوی فاصلهٔ تصویر نقطه ازتصویر لولا وضلع دیگرش مساوی اختلاف رقوم نقطه ولولا باشد.

۵ ـ برای تسطیح هر نقطه مانند M ، از m ، تصویر آن، خطی بر تصویر لولا عمود می‌کنیم تا آن را در i قطع‌کند و از m خطی موازی لولا می‌کشیم وبرروی آن طول $m\alpha$ را مساوی اختلاف رقوم نقطهٔ M و لولا جدا می‌کنیم وبه مرکز i وشعاع $i\alpha$ قوسی می‌زنیم تاعمود مزبور را در m' قطع کند؛ m' تسطیح M است.

۶ ـ فقط یك‌نقطهٔ صفحه‌ای‌را به‌قاعدهٔ مثلث قائم‌الزاویه تسطیح می‌کنیم؛ نقاط دیگرصفحه به‌کمك آن نقطه یا بااستفاده ازخطهای‌کمکی تسطیح می‌شوند.

۷ـ ترفیع ، عکس عمل تسطیح است و مانند تسطیح ، همهٔ نقاط صفحه به‌کمك نقطه‌ای‌که ترفیعش دردست باشد ، ترفیع می‌شوند.

تمرین

۴ـ نقطهٔ a_2 را در حول افقیه‌ای به رقوم صفر وسه تسطیح‌کنید.

۵ـ نقطهٔ a بدون رقوم وتسطیح آن a' درحول لولای رقوم‌صفر معلومند؛ رقوم نقطه را تعیین‌کنید.

۶ـ نقطهٔ a بدون رقوم وتسطیح آن a' درحول لولای غیر معلومی در دستند. مطلوب است تعیین لولا درصورتی‌که زاویهٔ تسطیح ۶۰ درجه‌باشد.

۷ـ تصویر رقوم‌دار وتسطیح یك‌نقطه درحول لولای مجهول، معلومند؛ مطلوب است لولا درصورتی‌که رقومش در دست باشد.

۸ـ خط Δ_0 ونقطهٔ a' تسطیح یك‌نقطه درحول این‌لولا معلومند؛ تصویر نقطه‌را تعیین‌کنید بنابر آنکه رقوم نقطه ۲ — باشد.

۹ـ دو نقطهٔ بدون رقوم a و b و اثر افقی صفحه‌ای‌که شامل آنهاست معلومند ؛ مطلوب است رقوم نقاط ، درصورتی‌که فاصلهٔ حقیقی این دو نقطه برابر طول معلوم l باشد (بحث).

۱۰ـ از نقطهٔ a_2 در صفحهٔ مفروض P خطی به شیب $\frac{1}{2}$ رسم کرده اثرافقی این خط را تعیین‌کنید ؛ اگرفرض‌کنیم‌که این اثر c_0 باشد، مطلوب است رسم مربعی درصفحهٔ P که خط a_2c_0 قطر آن باشد.

۱۱ـ خط Δ_0 ونقطهٔ a_2 مفروضند؛ مطلوب است رسم مثلث متساوی ـ الاضلاعی‌که یك رأسش a_2 و دو رأس دیگرش برخط Δ_0 واقع باشند.

۱۲ـ خط a_2b_5 ونقطهٔ c_1 مفروضند ؛ برخط نقطه‌ای تعیین کنید که فاصله‌اش از c_1 برابر طول معلوم l باشد (بحث).

۱۳ـ خط Δ اثرصفحهٔ P ونقاط a' و b' تسطیح دونقطه از این صفحه درحول Δ معلومند ؛ این‌نقاط را ترفیع‌کنید ، بنابر آنکه ab موازی امتداد معلومی باشد.

۱۴- خط Δ اثرافقی صفحهٔ P ونقاط a' و b' تسطیح دو نقطه ازهمین صفحه در حول Δ معلومند ؛ مطلوب است ab در صورتی که اختلاف ارتفاع A و B برابر l باشد (بحث).

۱۵- نقطهٔ a_1 وخط b_4c_6 مفروضند ؛ مطلوب‌است رسم‌مثلث‌متساوی‌الاضلاعی‌که یك‌ضلعش برخط مذکور واقع باشد ویك رأسش a_1 باشد .

۱۶- نقطهٔ o_6 و خط a_1d_2 مفروضند ؛ مطلوب است رسم مربعی که نقطهٔ O مرکز وخط a_1d_2 امتداد یکی از اضلاع‌آن باشد.

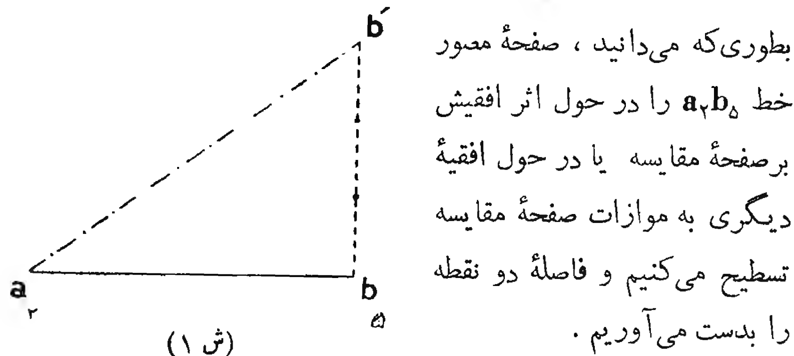
۱۷- نقاط a_5 و c_0 ونقطهٔ بی‌رقوم b تصاویر سه رأس ازیك لوزیند؛ رأس چهارم‌آن را تعیین‌کنید .

فصل پنجم

موارد استعمال[1]

I - فواصل

۱- فاصلهٔ دونقطه - برای تعیین فاصلهٔ دونقطه مانند a_2 و b_5، بطوری‌که می‌دانید ، صفحهٔ مصور خط a_2b_5 را در حول اثر افقیش برصفحهٔ مقایسه یا در حول افقیهٔ دیگری به موازات صفحهٔ مقایسه تسطیح می‌کنیم و فاصلهٔ دو نقطه را بدست می‌آوریم .



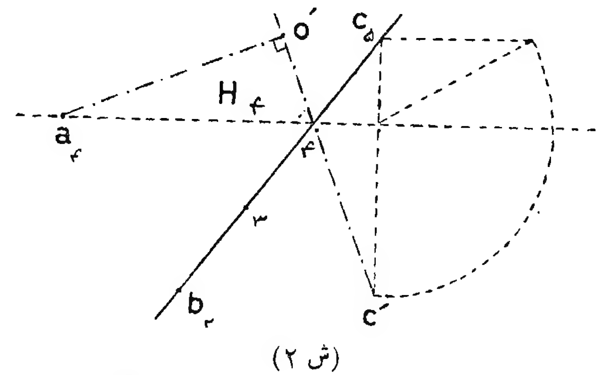
(ش ۱)

در شکل ۱ ، صفحهٔ مصور، درحول افقیه‌ای که بر a_2 می‌گذرد ، تسطیح شده است .

۲- فاصلهٔ نقطه از خط - برای تعیین فاصلهٔ نقطهٔ a_4 از خط b_2c_5 ، صفحهٔ $a_4b_2c_5$ را درحول لولای افقی H_4 تسطیح می‌کنیم وفاصلهٔ تسطیح نقطه را از تسطیح خط بدست می‌آوریم .

۱- تعلیم مسائلی‌که در این فصل با علامت * مشخص شده‌اند، اختیاری است .

در شکل ۲ ، تسطیح نقطهٔ a_4 بر خود آن واقع است و ao' فاصلهٔ مطلوب است .



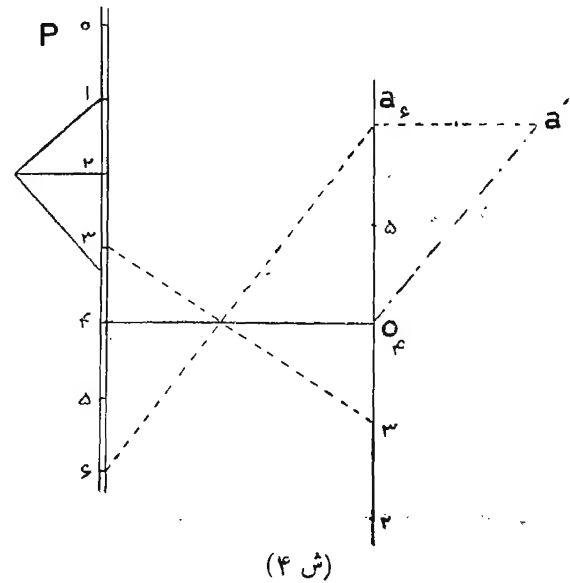
(ش ۲)

حالت مخصوص ـ چون فاصلهٔ نقطه از خط ، طول عمودی است که از نقطه برخط فرود آید و به آن محدود شود ، وقتی که خط قائم باشد (شکل۳) ، عمود برآن خطی افقی خواهد شد و در نتیجه تصویرش به مقدار حقیقی خواهد بود . در شکل ۳ ، فاصلهٔ نقطهٔ a_5 از خط قائم V ، طول aV است .

(ش ۳)

۳ـ فاصلهٔ نقطه از صفحه ـ فاصلهٔ نقطه ازصفحه، طول عمودی است که از آن نقطه بر صفحه فرودآید و به صفحه محدود شود .

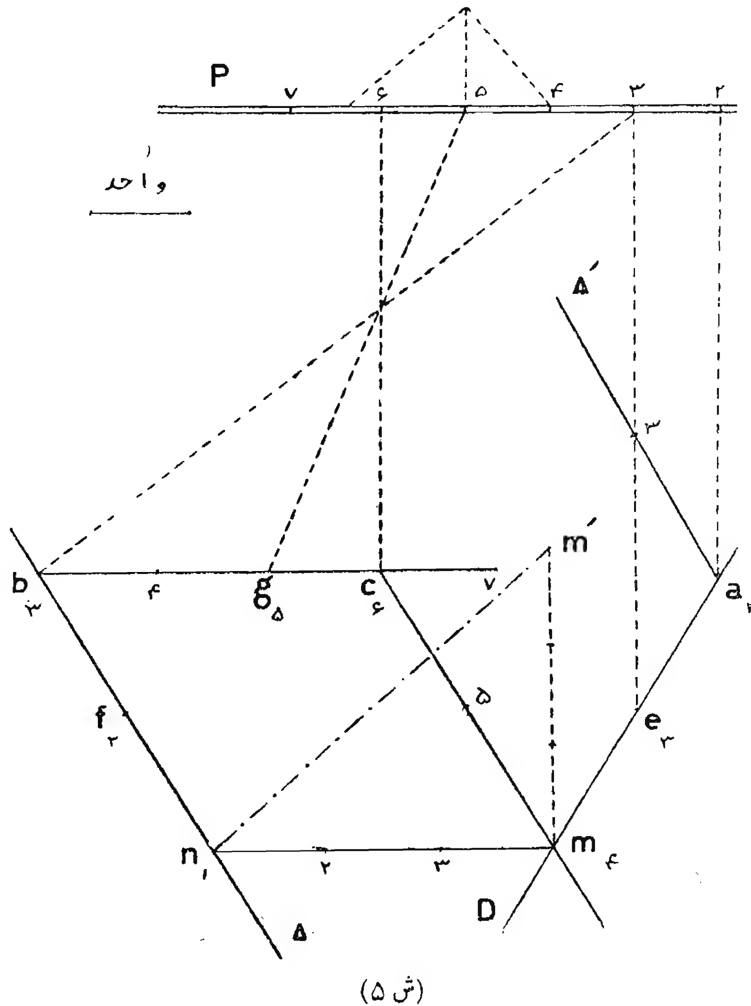
درشکل ۴ ، از نقطهٔ a_6 عمودی بر



(ش ۴)

صفحهٔ P رسم کرده موقع عمود ، نقطهٔ o_4 ، را بدست آورده‌ایم و طول قطعه خط a_6o_4 را به وسیلهٔ تسطیح صفحهٔ مصور خط درحول افقیهٔ رقوم ۴ تعیین کرده‌ایم .

۴ـ فاصلهٔ دوخط متنافر ـ فاصلهٔ دو خط متنافر طول عمود مشترک آنهاست ؛ در شکل ۵ قطعه خط m_4n_1 ، عمود مشترک دو خط متنافر a_2e_3 و b_3f_2 را ، طبق قاعده‌ای که در شمارهٔ ۲۹ فصل سوم گفته



(ش ۵)

شد، بدست آورده‌ایم و صفحهٔ مصور m_4n_1 را درحول افقیه‌ای‌که بر نقطهٔ n_1 می‌گذرد تسطیح کرده‌ایم؛ nm'، تسطیح خط m_4n_1 ، فاصلهٔ حقیقی دو خط متنافر a_2e_3 و b_3f_2 است .

۵ـ فاصلهٔ خط ازصفحه یا فاصلهٔ دوصفحه از یکدیگر، فقط وقتی مورد پیدا می‌کند که خط با صفحه موازی باشد یا دو صفحه متوازی باشند. دراین صورت کافی است که فاصلهٔ یك نقطهٔ خط را از صفحه یا فاصلهٔ یك نقطهٔ واقع دریك صفحه را از صفحهٔ دیگر یافت .

تمرین

۱ـ برخط a_2b_5 نقطه‌ای‌بیابیدکه فاصله‌اش ازنقطهٔ o_4 مساوی۳باشد.

۲ـ نقطهٔ رقوم‌دار a_4 و b تصویر بی‌رقوم نقطهٔ B و فاصلهٔ حقیقی AB داده شده‌اند ؛ رقوم b را بدست‌آورید .

۳ـ برخط قائم V نقطه‌ای تعیین‌کنیدکه ازنقطهٔ مفروض a_2 به فاصلهٔ ۵ باشد. مسئله چه وقت جواب دارد ؟

۴ـ دوخط متوازی Δ و D وصفحهٔ P داده شده‌اند ؛ مطلوب است تعیین نقاطی از صفحهٔ P که ازدوخط Δ و D به یك فاصله باشند .

۵ـ نظیر تمرین ۴ وقتی‌که دو خط Δ و D متقاطع باشند .

۶ـ دو خط متوازی Δ و D و صفحهٔ P داده شده‌اند ؛ در صفحهٔ P نقطه‌ای بدست‌آوریدکه از دو خط به فاصلهٔ l باشد .

۷ـ دوخط متنافر Δ و D داده شده‌اند؛ کوچکترین مربعی را بسازید که مرکزش روی Δ ویك ضلعش روی D باشد .

II ـ زوایا

۶ـ زاویهٔ بین دوخط ـ برای تعیین زاویهٔ بین دوخط متقاطع، صفحهٔ آنهارا تسطیح می‌کنیم وزاویهٔ بین تسطیح دوخط را اندازه می‌گیریم.

زاویهٔ بین دوخط متنافر مساوی زاویهٔ بین دو خط متقاطعی است که با دوخط مذکور موازی رسم شوند .

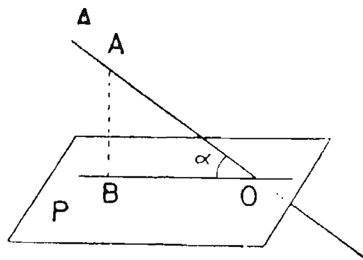
تمرین ۱ـ نیمساز زاویهٔ بین دو خط a_2b_5 و a_2c_7 را رسم‌کنید .

تمرین ۲ـ درصفحه‌ای‌که برخط Δ ونقطهٔ A می‌گذرد ، از A خطی رسم‌کنیدکه با Δ زاویهٔ α بسازد (تعداد جوابها ؟) .

۷ـ زاویهٔ خط وصفحه ـ زاویهٔ بین خط Δ و صفحهٔ P عبارت است از زاویهٔ حادهٔ بین خط وتصویرش برآن صفحه . این زاویه را **میل** خط نسبت به صفحه می‌گویند (شکل ۶) .

برای تعیین زاویهٔ بین خط و صفحه به دو طریق می‌توان عمل کرد :

الف ـ اگر فقط مقصود ، دانستن اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه باشد ، ازیك نقطهٔ A واقع برخط، عمودی برصفحه فرود می‌آوریم و زاویهٔ بین عمود وخط را اندازه می‌گیریم؛ متمم این زاویه، زاویهٔ بین خط و صفحه است .

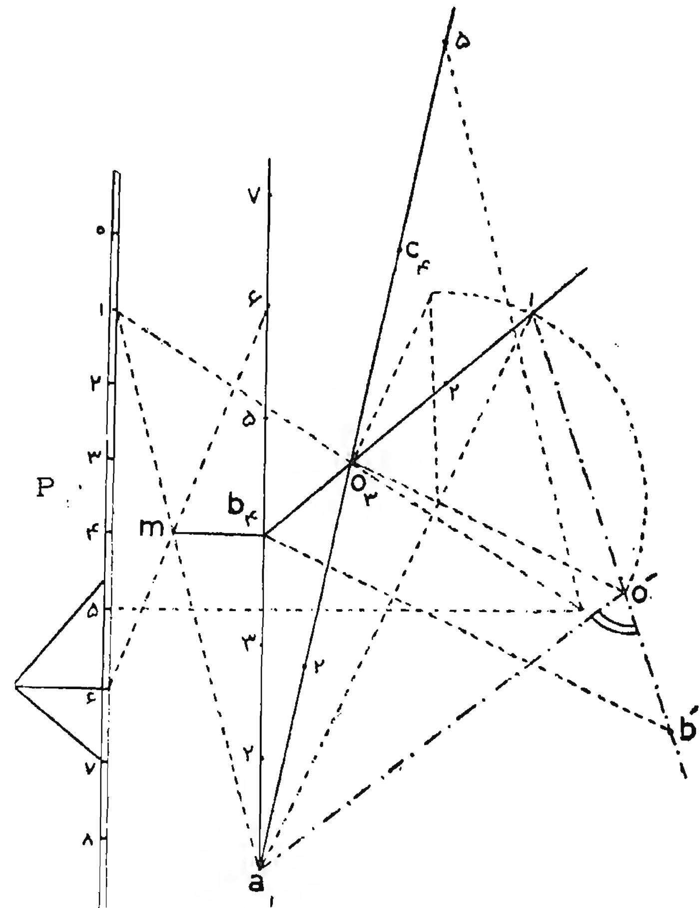


(ش ۶)

ب ـ هرگاه مقصود ، نمایش زاویهٔ بین خط و صفحه باشد، O فصل

مشترك خط و صفحه، و B تصویر یك نقطه مانند A ازخط را روی صفحه بدست می‌آوریم ؛ زاویهٔ AOB زاویهٔ بین خط وصفحه است .

ملخص ـ برای بدست آوردن زاویهٔ بین خط a_1c_4 و صفحهٔ P (شکل ۷) ، از a_1 عمودی بر صفحه فرود آورده پای عمود ، نقطهٔ b_4 ، را بدست‌آورده‌ایم .



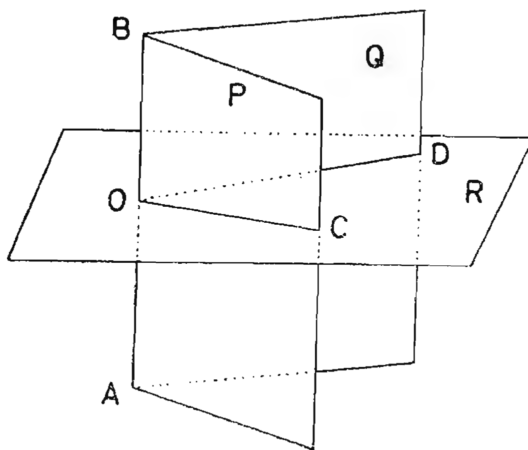
(ش ۷)

نقطهٔ o_3 ، فصل مشترك AC وصفحهٔ P ، به‌وسیلهٔ صفحهٔ کمکی که امتداد افقیه‌هایش am است ، معین شده است . $\widehat{AOB}$ را در حول افقیهٔ رقوم ۱ تسطیح‌کرده اندازهٔ زاویهٔ $a_1o_3b_4$ را بدست آورده‌ایم .

حالت خاص ـ زاویهٔ خط با صفحهٔ مقایسه ـ صفحهٔ مصور خط را تسطیح می‌کنیم و زاویهٔ بین تسطیح و تصویرخط، یعنی میل خط، را اندازه می‌گیریم .

۸ـ زاویهٔ بین دو صفحه ـ زاویهٔ دوصفحه ، عبارت‌است ازمسطحهٔ فرجهٔ بین‌آنها، یعنی زاویه‌ای‌که اضلاعش برفصل مشترك دوصفحه عمود باشند و هرضلعش در یکی‌ازآن دو صفحه باشد .

برای تعیین زاویهٔ بین دو صفحهٔ P و Q ، از یك نقطهٔ اختیاری O واقع بر فصل مشترك دو صفحه ، صفحهٔ R را بر فصل مشترك عمود می‌کنیم تا P و Q را در OC و OD قطع‌کند (شکل ۸) ؛ زاویهٔ COD مسطحهٔ فرجهٔ دو صفحه ، یعنی زاویهٔ مطلوب است .

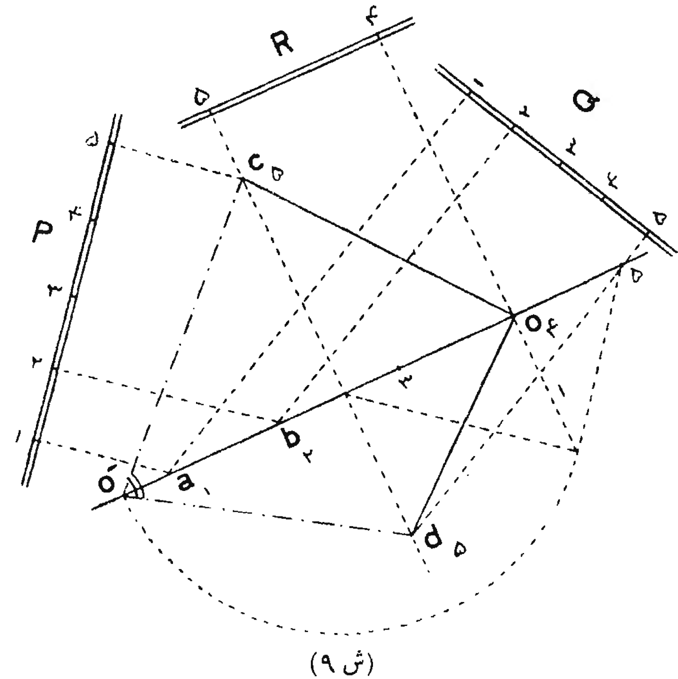


(ش ۸)

تبصره ـ هر گاه‌مقصود، فقط بدست آوردن اندازهٔ مسطحهٔ فرجهٔ دو صفحه باشد، نه نمایش خودآن،راه آسانتری هست؛ بدین قرار که از یك نقطهٔ اختیاری O دو عمود OM و ON را بر دو

صفحه فرود می‌آوریم ؛ زاویهٔ MON مکمل فرجهٔ دو صفحه است ؛ پس زاویهٔ بین دو خط را یافته و مکمل آن را اندازه می‌گیریم تا مقدار مسطحهٔ فرجهٔ دوصفحه بدست‌آید .

ملخص – a_1b_2 فصل مشترك دوصفحهٔ P و Q را بدست آورده‌ایم (شکل ۹) ؛ از نقطهٔ o_4 واقع بر a_1b_2 ، صفحهٔ R را برآن عمود کرده



(ش ۹)

o_4c_5 و o_4d_5 فصل مشترکهای R را با صفحات P و Q تعیین کرده‌ایم ؛ آنگاه زاویهٔ $c_5o_4d_5$ را درحول لولای افقی رقوم ۵ درصفحهٔ R تسطیح کرده اندازهٔ حقیقی‌آن را مشخص ساخته‌ایم .

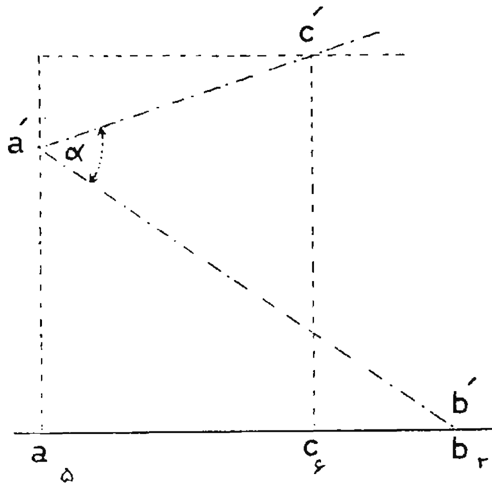
۹ – حالت خاص – زاویهٔ صفحه با صفحهٔ مقایسه – صفحهٔ مصور مقیاس شیب صفحه را تسطیح کرده تسطیح مقیاس شیب را بدست می‌آوریم ؛ زاویه‌ای‌که مقیاس شیب با تسطیحش می‌سازد جواب است .

ممکن‌است یکی از افقیه‌های صفحه‌را لولا قرارداده برای یکی‌از نقاط صفحه (مثلاً يك نقطه از مقیاس شیب صفحه) مثلث تسطیح را بسازیم ؛ دراین صورت ، زاویهٔ تسطیح جواب مسئله خواهد بود .

حل چند مسئلهٔ مهم

۱۰ – از نقطهٔ A واقع بر خط D ، خطی رسم‌کنید‌که با آن زاویهٔ α بسازد .

مسئله جوابهای بیشمار دارد ؛ زیراکه ازنقطهٔ واقع برخطی، بینهایت خط می‌توان رسم کرد که با آن زاویهٔ α بسازند ؛ ما یکی از آن خطوط را رسم می‌کنیم .

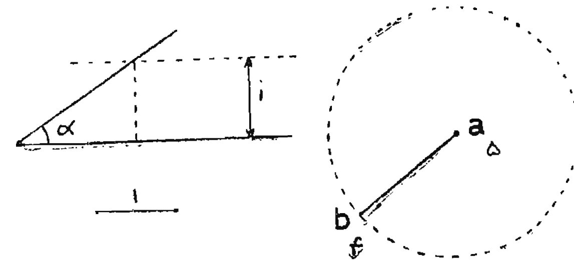


(ش ۱۰)

اگر نقطهٔ a_5 و خط a_5b_2 در نظر باشند (شکل۱۰) ، صفحهٔ مصور a_5b_2 را تسطیح‌کرده خط $a'c'$ را چنان می‌کشیم که با $a'b'$ ، تسطیح a_5b_2 ، زاویهٔ مطلوب را بسازد ؛ بعد c' را در c_6 ترفیع می‌کنیم ؛ a_5c_6 خط مطلوب است .

۱۱– از نقطهٔ a_5 خطی رسم‌کنید‌که باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ α بسازد .

ابتدا در گوشهٔ شکل با ساختن زاویهٔ α ، فراز خط را بدست می‌آوریم (شکل ۱۱) ؛ سپس به مرکز a_5 و با شعاعی مساوی آن فراز ،



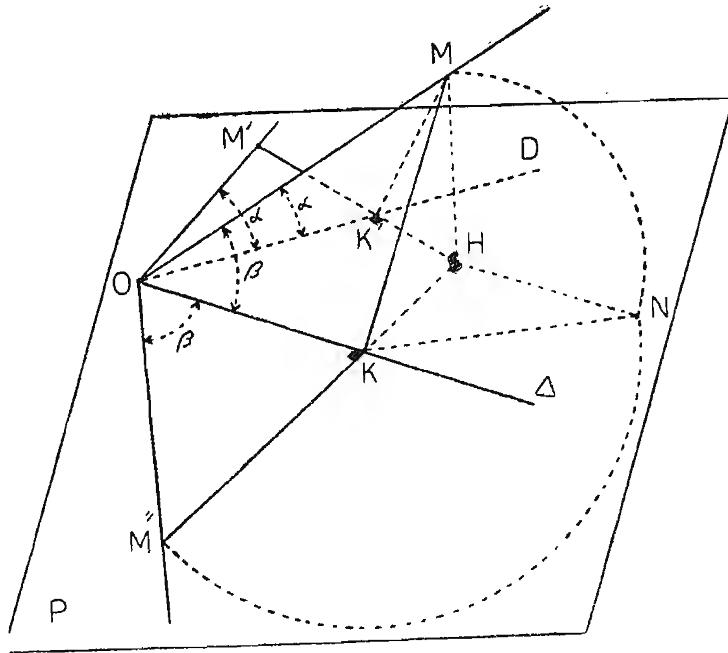
(ش ۱۱)

دایره‌ای می‌زنیم ؛ هر نقطهٔ این دایره مانند b_4 راکه به a_5 وصل‌کنیم ، a_5b_4 یك جواب مسئله است و مسئله جوابهای بیشمار دارد .

۱۳ـ مسئله ـ بر نقطهٔ O ، محل تقاطع دوخط D و Δ ، خطی بگذرانید که با دو خط D و Δ زوایای α و β بسازد .

حل فضایی ـ اگر مسئله حل شده و OM خط مطلوب باشد (شکل ۱۲) و از یك نقطهٔ اختیاری M ازآن ، عمود MH را برصفحهٔ P که بر دو خط مذکور می‌گذرد فرود آوریم و از O در صفحهٔ P دو خط رسم‌کنیم‌که بترتیب با D و Δ زوایای α و β بسازند و از H دوعمود بر D و Δ فرودآوریم تا D و Δ را در K' و K و دو خط مرسوم را در M' و M'' قطع‌کنند ، دومثلث قائم‌الزاویهٔ MOK و $M''OK$ متساویند (حالت دو زاویه و ضلع بین آنها) ؛ همچنین دو مثلث MOK' و $M'OK'$ متساویند ، پس $OM'=OM''=OM$ و نیز $KM''=KM$ و $K'M'=K'M$ ؛ حال اگر از H خطی موازی Δ بکشیم تا قوسی را که به مرکز K و شعاع KM'' روی صفحهٔ P رسم می‌کنیم در N تلاقی کند ، دو مثلث HKN و HKM نیز متساوی می‌شوند (زیراکه در H

قائم‌الزاویه‌اند وضلع HK درهردومشترك‌است و $(KM=KM''=KN)$ ؛ پس $HM=HN$.



(ش ۱۲)

حال اگر به ترتیب عکس عمل کنیم ، یعنی در صفحهٔ P که بر D و Δ می‌گذرد ، دو خط OM' و OM'' را طوری بکشیم‌که بترتیب با D و Δ زوایای α و β بسازند ، و دو طول اختیاری $OM'=OM''$ را بر آنها جداکنیم و از M' و M'' بترتیب دو عمود $M'K'$ و $M''K$ را بر D و Δ فرودآوریم تایکدیگررا در H قطع کنند و از H خطی موازی Δ بکشیم تا قوسی راکه به مرکز K و شعاع KM'' روی صفحهٔ P رسم می‌کنیم در N قطع‌کند ، طول HN ، که با اجرای این ترسیمات در صفحهٔ P بدست می‌آید، مساوی اندازهٔ حقیقی HM خواهد بود وبرای

تعیین نقطهٔ M کافی است که از H عمودی بر صفحهٔ P اخراج کرده طول HM را مساوی HN برآن جدا کنیم ؛ همینکه نقطهٔ M بدست آمد ، خطی که از O به M وصل شود خط مطلوب خواهد بود .

شرط امکان مسئله این است که $\alpha+\beta$ بزرگتر از زاویهٔ بین دو خط مفروض و $\alpha-\beta$ کوچکتر از آن باشد .

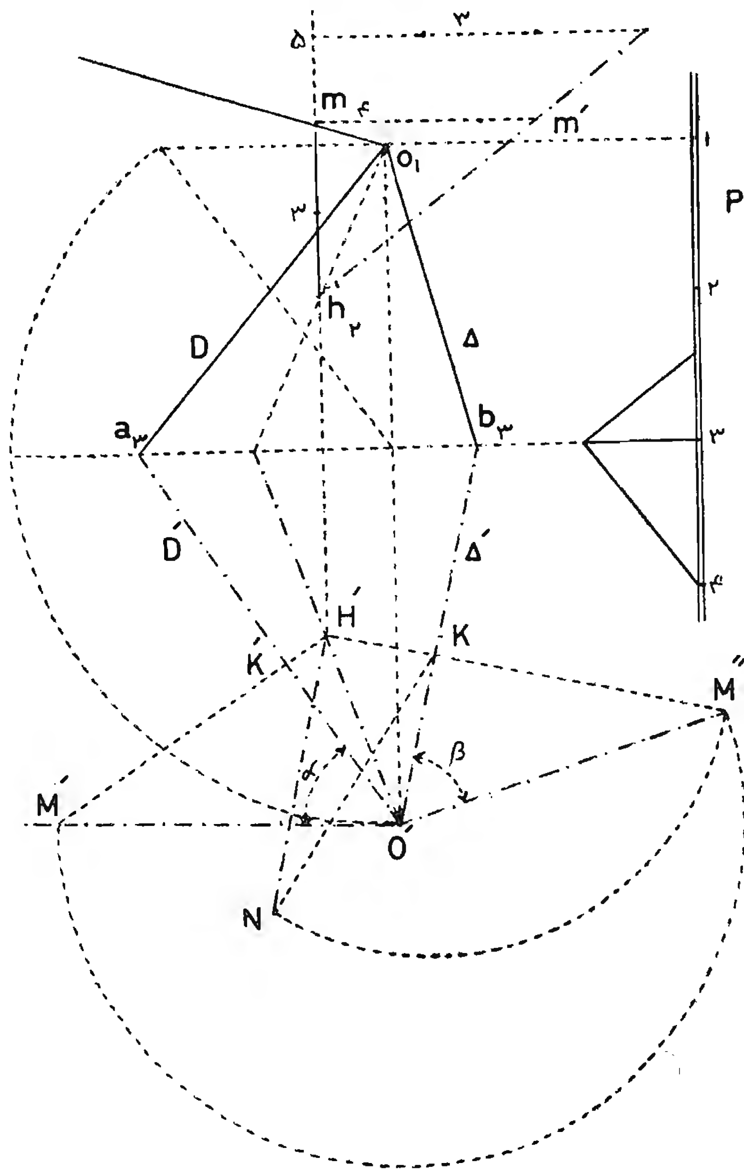
ملخص ـ قسمتی ازحل مسئله ، یعنی از رسم صفحهٔ دوخط D و Δ تا تعیین طول عمودی که باید برصفحه اخراج کنیم ، باید در تسطیح حل و رسم شود .

دوخط متقاطع o_1a_3 (یا D) و o_1b_3 (یا Δ) مفروضند (شکل۱۳)؛ صفحهٔ این دو خط را درحول افقیهٔ رقوم ۳ تسطیح کرده‌ایم ، نقطهٔ o_1 در O' تسطیح شده است و دو خط $O'M'$ و $O'M''$ بترتیب با $O'a$ و $O'b$ زوایای α و β ساخته‌اند ؛ طولهای $O'M'$ و $O'M''$ برابر یکدیگرند ؛ $M'K'$ و $M''K$ (بترتیب عمود بر $O'a$ و $O'b$) یکدیگررا در H' قطع کرده‌اند ؛ از H' خطی موازی $O'K$ کشیده‌ایم تا قوسی به مرکز K و شعاع KM'' را در N قطع کرده است .

H' در h_2 ترفیع شده است و از h_2 عمودی بر صفحهٔ دو خط مفروض اخراج وطولی مساوی $H'N$ برآن جدا شده تا m_4 بدست‌آمده است ؛ خط o_1m_4 جواب مسئله است .

تبصره ـ اگر بخواهیم از نقطه‌ای خطی رسم کنیم که با دو خط متنافر زوایای معین بسازد ، کافی است که ابتدا از آن نقطه دو خط به موازات دو خط متنافر بکشیم ، سپس خطی رسم کنیم که با دو خط اخیر زوایای معین را تشکیل دهد .

۱۳ ـ با توجه به اینکه **هرگاه خطی با صفحه‌ای زاویهٔ**



(ش ۱۳)

α بسازد با هرخط که برآن صفحه عمود باشد زاویهٔ $(90^\circ-\alpha)$

می‌سازد و با استفاده از مسئلهٔ شمارهٔ ۱۲ فصل پنجم ، مسائل زیر را می‌توان بآسانی حل‌کرد :

الف ـ خطی رسم‌کنیدکه با خط مفروض Δ زاویهٔ α و با صفحهٔ مفروض P زاویهٔ β بسازد . کافی‌است‌که خطی رسم شود که با Δ زاویهٔ α و با خط عمود بر P زاویهٔ $(90°-\beta)$ تشکیل دهد .

ب ـ خطی رسم‌کنیدکه بادوصفحهٔ مفروض P و Q زوایای α و β بسازد. کافی است‌که خطی رسم‌کنیم که با دو خط عمود بر آن دو صفحه زاویه‌های $(90°-\alpha)$ و $(90°-\beta)$ تشکیل دهد .

ج ـ صفحه‌ای رسم کنید که با دو خط D و Δ زوایای α و β بسازد (α بزرگتر از β فرض می‌شود) . کافی است‌که خطی رسم کنیم که با D و Δ زوایای $(90°-\alpha)$ و $(90°-\beta)$ تشکیل دهد و صفحه‌ای برآن خط عمود کنیم .

شرط امکان مسئله ، هرگاه زاویهٔ بین دوخط D و Δ را φ بنامیم، این است‌که

$$(90°-\alpha)+(90°-\beta)>\varphi$$

و

$$(90°-\beta)-(90°-\alpha)<\varphi$$

یعنی :

$$\alpha-\beta<\varphi \quad \text{و} \quad \alpha+\beta<180°-\varphi$$

د ـ صفحه‌ای رسم‌کنیدکه باخط مفروض Δ زاویهٔ α و با صفحهٔ مفروض P زاویهٔ β بسازد . این صفحه با Δ زاویهٔ α و با خط عمود بر P زاویهٔ $(90°-\beta)$ خواهد ساخت .

هـ ـ صفحه‌ای رسم کنیدکه با دو صفحهٔ مفروض P و Q زاویه‌های α و β بسازد . این صفحه عمود برخطی خواهد بود که با دوصفحهٔ P و Q متمم زوایای α و β را تشکیل دهد .

تمرین ـ ۱ - بر o_5 خطی بگذرانید که با a_1b_4 زاویهٔ ۴۵° و با صفحهٔ قائم مفروض هم زاویهٔ ۴۵° بسازد .

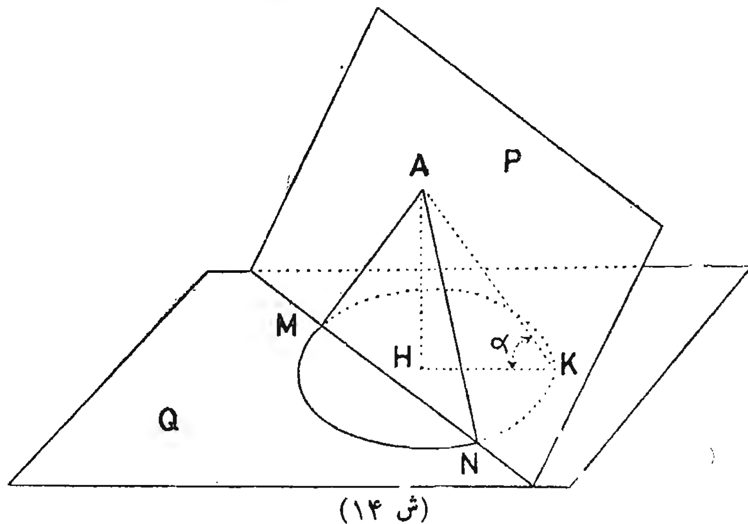
۲- بر o_5 صفحه‌ای مروردهیدکه با a_2b_7 و c_3d_5 بترتیب زاویه‌های ۷۵° و ۴۵° بسازد .

۳- بر o_5 صفحه‌ای بگذرانیدکه با a_3b_7 زاویهٔ ۲۰° وباصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵° بسازد .

(برای هریك از قسمتهای ۲ و ۳ شکل جداگانه رسم‌کنید) .

۱۴- مسئله ـ دوصفحهٔ متقاطع P و Q ونقطهٔ A درصفحهٔ P مفروضند ؛ در صفحهٔ P بر A خطی مرور دهید که با صفحهٔ Q زاویهٔ α بسازد .

از نقطهٔ A عمود AH را بر Q فرود آورده و AK را بقسمی رسم می‌کنیم‌که با AH متمم زاویهٔ α را بسازد و Q را در K قطع کند (شکل ۱۴) ؛ در صفحهٔ Q به مرکز H و شعاع HK دایره‌ای می‌زنیم



(ش ۱۴)

تا فصل مشترك دو صفحه را در M و N قطع کند ؛ AM و AN جوابهای مسئله‌اند (شکل ۱۴) . اگر دایرهٔ مذکور بر فصل مشترك دو صفحه مماس شود ، مسئله فقط یك جواب دارد که بزرگترین شیب صفحهٔ P نسبت به صفحهٔ Q است . هرگاه دایرهٔ مذکور فصل مشترك

دو صفحه را قطع نکند ، مسئله دارای جواب نیست ؛ به عبارت دیگر، اگر α ازمسطحهٔ دو صفحه کوچکتر باشد مسئله دو جواب دارد واگر باآن مساوی باشد ، یك جواب دارد ، و اگر بزرگتر باشد ، جواب ندارد .

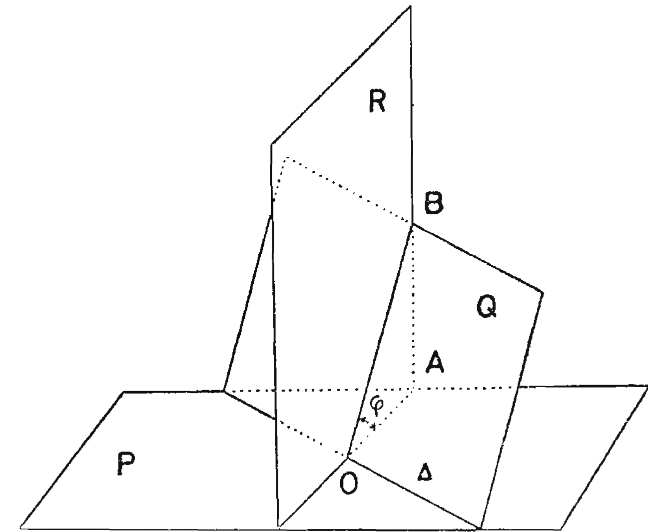
تمرین ـ دو صفحهٔ P و Q اولی به شیب $\frac{1}{2}$ و دومی به شیب $\frac{1}{4}$ را چنان رسم کنید که مقیاس‌شیبهایشان باهم زاویهٔ ۴۵° بسازند ، در P نقطه‌ای به رقوم ۱ اختیار کنید و ازآن درصفحهٔ P خطی رسم کنید که با صفحهٔ Q زاویهٔ ۳۰° بسازد .

۱۵ـ مسئله ـ برخط مفروض Δ صفحه‌ای مرور دهید که با صفحهٔ مفروض P زاویهٔ φ بسازد .

در حل این مسئله سه حالت اتفاق می‌افتد :

الف ـ خط Δ در صفحهٔ P است ؛ ب ـ خط Δ با صفحهٔ P موازی است ؛ ج ـ خط Δ صفحهٔ P را قطع می‌کند .

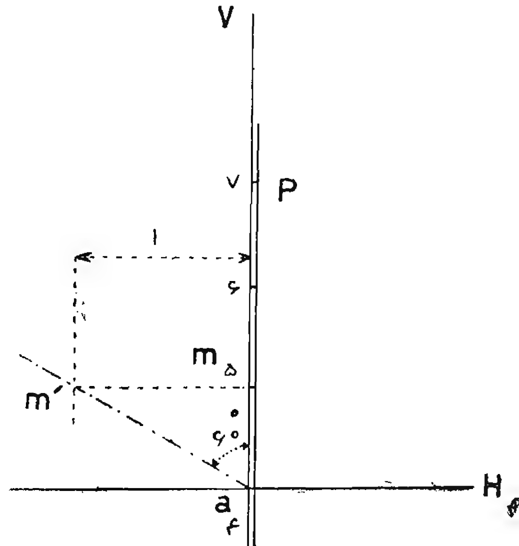
حالت اول ـ خط Δ در صفحهٔ P است (شکل ۱۵) و می‌خواهیم



(ش ۱۵)

برآن صفحه‌ای بگذرانیم که با P زاویهٔ φ بسازد . از یك نقطهٔ O واقع بر Δ صفحه‌ای مانند R برآن عمودی کنیم تاصفحهٔ P را در فصل‌مشترك OA قطع کند؛ درصفحهٔ R ازنقطهٔ O خطی‌مانند OB می‌کشیم که با OA زاویهٔ φ بسازد ؛ صفحهٔ Q که بردوخط Δ و OB می‌گذرد، صفحهٔ مطلوب است ؛ زیرا که مسطحهٔ فرجهٔ دو صفحهٔ P و Q برابر φ است . مسئله همیشه دو جواب دارد مگر به ازای φ=۹۰° که یك جواب دارد .

ملخص ـ خط H_4 در صفحهٔ افقی رقوم ۴ داده شده (شکل ۱۶)؛ برای‌آنکه بر H_4 صفحه‌ای بگذرانیم که باصفحهٔ افقی زاویهٔ ۶۰° بسازد،

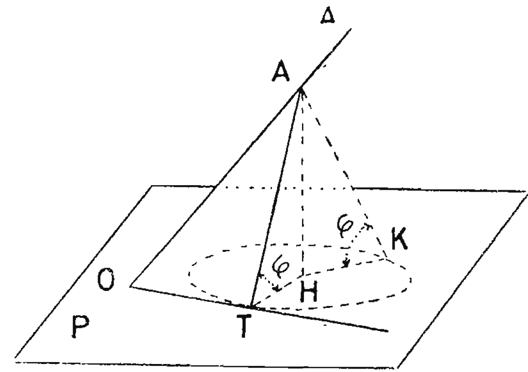


(ش ۱۶)

از نقطهٔ a_4 ، واقع بر H_4 ، صفحه‌ای برآن عمود کرده‌ایم (صفحهٔ قائم V) ؛آنگاه‌آن را درحول افقیهٔ رقوم ۴ به‌موازات صفحهٔ مقایسه تسطیح کرده am′ را چنان کشیده‌ایم که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۶۰° بسازد ؛ m′ تسطیح نقطهٔ رقوم ۵ را بدست‌آورده‌آن را در m_5 ترفیع کرده‌ایم و مقیاس‌شیب صفحهٔ $m_5a_4H_4$ ،صفحهٔ‌مطلوب، را رسم‌کرده مدرج ساخته‌ایم.

حالت دوم ــ هرگاه خط Δ با صفحهٔ P موازی باشد، بر آن صفحه‌ای به موازات P می‌گذرانیم و مسئله را مانند حالت اول حل می‌کنیم.

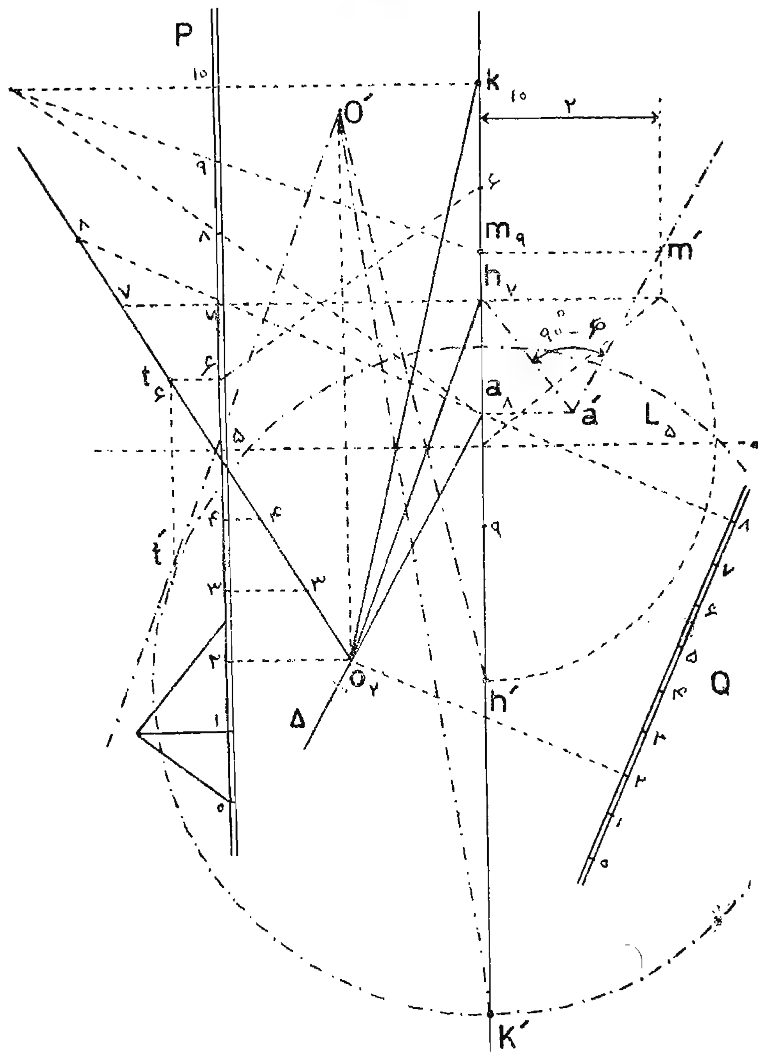
حالت سوم ــ Δ صفحهٔ P را در O قطع می‌کند (شکل ۱۷). ازیکی ازنقاط خط، مثلاً A، عمود AH را برصفحهٔ P فرود می‌آوریم و نیز از A خطی می‌کشیم که با AH زاویهٔ $(90° - \varphi)$ بسازد و P را در K قطع کند؛ در صفحهٔ P به مرکز H وشعاع HK دایره‌ای می‌زنیم و از O مماس OT را بر این دایره رسم‌می‌کنیم؛ صفحه‌ای که‌بر OA و OT بگذرد صفحهٔ مطلوب است؛ زیراکه با صفحهٔ P زاویهٔ $\varphi = ATH$ را می‌سازد.



(ش ۱۷)

هرگاه φ از میل خط نسبت به صفحهٔ P بزرگتر باشد، نقطهٔ O در خارج دایرهٔ مرسوم می‌افتد و ازآن می‌توان دو مماس برآن دایره رسم کرد؛ پس مسئله دو جواب دارد. اگر φ مساوی میل خط باشد، دایره بر O می‌گذرد و مسئله فقط دارای یك جواب است. اگرφ ازمیل خط‌کوچکتر باشد، مسئله دارای جواب نیست.

ملخص ــ صفحهٔ P وخط $a_8 o_2$ (یا Δ) داده شده‌اند؛ می‌خواهیم براین خط صفحه‌ای بگذرانیم که با P زاویهٔ φ بسازد (شکل ۱۸)؛ o_2 نقطهٔ تقاطع خط با صفحه است.



(ش ۱۸)

از a_8 عمودی بر صفحهٔ P رسم کرده و h_7 پای عمود را بدست آورده‌ایم؛ سپس این عمود را با صفحهٔ مصورش بر صفحهٔ افقی رقوم ۷ تسطیح کرده از a′، تسطیح a_8، خطی‌کشیده‌ایم که با a′h، تسطیح a_8h_7،

زاویهٔ $(90^\circ-\varphi)$ ساخته است ؛ این خط را در a_8m_9 ترفیع کرده‌ایم ؛ نقطهٔ برخورد a_8m_9 با صفحهٔ P نقطهٔ k_{10} است ؛ h_7 و o_2 و k_{10} را در حول افقیهٔ $L_{1,5}$ از صفحهٔ P در h' و O' و k' تسطیح کرده از O' بر دایره‌ای به‌مرکز h' وشعاع $h'k'$ مماس $O't'$ راکشیده وآن را در o_2t_6 ترفیع کرده‌ایم؛ صفحه‌ای‌که بر o_2a_8 و o_2t_6 می‌گذرد، یك جواب مسئله است ؛ Q مقیاس شیب آن را بدست‌آورده‌ایم .

تبصره ــ می‌توان حالت دوم را مانند حالت سوم عمل‌کرد و نقطهٔ O را بینهایت دور انگاشت .

۱۶ــ مسئله ــ در صفحهٔ مفروض P خطی رسم‌کنیدکه با خط Δ ، که خارج صفحه است ، زاویهٔ φ بسازد .

O فصل مشترك P و Δ را بدست می‌آوریم ؛ از O خطی مانند


(ش ۱۹)

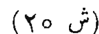
D می‌کشیم‌که با Δ زاویهٔ φ بسازد ؛ از نقطهٔ H‌که بر Δ اختیارمی‌شود، صفحهٔ R را براین خط عمود می‌کنیم تا D را در K و P را در فصل

مشترك AB قطع‌کند ؛ در صفحهٔ R به مرکز H و شعاع HK (یا در P به مرکز O و شعاع OK)، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا فصل مشترك AB را در M و N قطع‌کند ؛ OM و ON جوابهای مسئله‌اند (شکل۱۹).

تمرین ــ درصورتی‌که P صفحهٔ افقی تصویر و Δ غیر مشخص باشد ، ملخص مسئلهٔ شمارهٔ ۱۶ را رسم‌کنید .

۱۷ ــ مسئله ــ برخط مفروض Δ صفحه‌ای بگذرانید که با خط مفروض دیگر D زاویهٔ α بسازد .

دو خط را در O متقاطع فرض می‌کنیم (شکل ۲۰) . از نقطهٔ


(ش ۲۰)

اختیاری A واقع بر D صفحهٔ P را بر Δ عمود می‌کنیم تاآن را در B قطع کند ؛ در خارج ، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که وترش مساوی OA و یك زاویه‌اش مساوی α باشد ؛ درصفحهٔ P به مرکز A وشعاعی

مساوی $A'H'$ دایره‌ای می‌زنیم وازB مماس BH را برآن رسم‌می‌کنیم؛ صفحهٔ Q که بر Δ و BH می‌گذرد جواب مسئله است ؛ زیراکه با خط D زاویهٔ $AOH=\alpha$ را می‌سازد .

تمرین

۱ـ فاصلهٔ نقطهٔ a_1 را از خط b_2c_5 تعیین‌کنید .

۲ـ فاصلهٔ نقطهٔ a_2 را از افقیهٔ b_3c_3 یا از افقیهٔ b_2c_2 تعیین‌کنید.

۳ـ درصفحهٔ مفروض P ازنقطهٔ a_2 خطی دراین صفحه چنان رسم‌کنید که فاصلهٔ‌آن ازنقطهٔ b_5 واقع درهمین صفحه برابرطول l باشد(بحث) .

۴ـ درصفحهٔ مفروض P نقطه‌ای تعیین‌کنیدکه از سه‌نقطهٔ a_5 و b_1 و c_2 به‌یك فاصله باشد .

۵ـ نقطهٔ a_5 و خط b_1c_2 مفروضند ؛ مطلوب است تعیین نقطه‌ای از صفحهٔ مفروض P که به مقیاس شیبش نموده شده بقسمی که از نقطه و خط فوق‌الذکر متحدالفاصله باشد .

۶ـ خط a_1b_5 و دایرهٔ معلوم C واقع در صفحهٔ P مفروضند. فاصلهٔ نزدیکترین نقطهٔ دایره را از خط تعیین‌کنید .

۷ـ زاویهٔ خط a_1b_5 را اولا با صفحهٔ مقایسه ، ثانیاً باصفحهٔ قائمی که به وسیلهٔ اثرش V نمایش داده‌ایم ، بدست‌آورید .

۸ـ دوخط a_1b_5 و c_2d_4 مفروضند ؛ زاویهٔ حقیقی این دوخط را به وسیلهٔ ترسیم نمایش دهید .

۹ـ از نقطهٔ مفروض P خطی رسم کنید که با m_1n_3 زاویه‌ای برابر °۶۰ یا °۴۵ بسازد وآن را قطع‌کند .

۱۰ـ در صفحهٔ مفروض P خطی رسم‌کنیدکه زاویهٔ‌آن با صفحهٔ مقایسه ماکزیمم باشد .

۱۱ـ از نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید موازی صفحهٔ P که با دو خط

معلوم زوایای متساوی تشکیل دهد .

۱۲ـ از نقطهٔ مفروض ، خطی رسم کنید که با دو خط متقاطع زوایای متساوی تشکیل دهد. (عدهٔ جوابها) ؟

۱۳ـ نقطهٔ a_2 و صفحات P و Q مفروضند ؛ از این نقطه صفحه‌ای مرور دهید عمود برP که باصفحهٔ Q زاویه‌ای برابر °۶۰ تشکیل دهد.

۱۴ـ زاویهٔ بین یك صفحهٔ قائم ویك صفحه راکه به مقیاس شیبش‌نموده شده است ، تعیین‌کنید .

۱۵ـ از نقطهٔ a_5 خطی در صفحهٔ افق‌چنان رسم‌کنیدکه با خط b_1c_2 زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه تشکیل دهد .

۱۶ـ زاویهٔ‌بین یك صفحه راکه به وسیلهٔ مقیاس شیبش نموده شده‌است، باصفحه‌ای که مقیاس شیبش به موازات مقیاس شیب صفحهٔ اول باشد، بدست آورید .

۱۷ـ برخط a_2b_5 واقع درصفحهٔ مفروضP صفحه‌ای مرور دهیدکه زاویه‌اش باصفحهٔ P برابر۶۰ درجه شود .

۱۸ـ بر نقطهٔ a_5 صفحه‌ای مرور دهید که برصفحهٔ مفروض P عمود باشد وبا صفحهٔ Q زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه بسازد .

۱۹ـ برنقطهٔ a_3 دو صفحه چنان مرور دهیدکه‌آثار افقی‌آنها متوازی باشند و زاویهٔ بین‌آنها ۵۰ درجه باشد . عدهٔ جوابها ؟

۲۰ـ برصفحهٔ مفروض، نقطه‌ای بدست آوریدکه از دونقطهٔ مفروض به فواصل l و l' باشد ؛ (بحث) .

۲۱ـ در صفحهٔ مفروض، خطی چنان رسم‌کنید که جزئی ازآن‌که بین دوخط معین صفحه محدود می‌شود، به طول l باشد و خودآن با خط‌مفروض دیگری ازهمان صفحه زاویهٔ α بسازد.

۲۲ـ برخط مفروض ، نقطه‌ای چنان تعیین کنید که : ۱ـ از دو خط متقاطع مفروض ، به یك فاصله باشد . ۲ ـ از خط و نقطهٔ مفروضی به یك فاصله باشد .

۲۳ـ دو خط متوازی Δ و D و دونقطهٔ a_5 و b_2 درصفحهٔ مار برآن دوخط داده شده‌اند ؛ برآن دو نقطه دوخط متوازی بگذرانیدکه با D و Δ تشکیل یك لوزی دهند .

۲۴ـ دوخط متنافر Δ و D داده شده‌اند ؛ یك لوزی بسازیدکه قطر

اطولش بر Δ و قطر اقصرش برعمود مشترك دوخط و يك رأسش بر D واقع باشند و قطر اطول آن دوبرابر قطر اقصرش باشد .

۲۵ـ دونقطهٔ C و B و صفحهٔ P داده شده‌اند؛ مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازیدکه دو رأسش B و C ورأس سومش درصفحهٔ P باشد .

۲۶ـ برخطی واقع در صفحهٔ مقایسه ، نقطه‌ای معین‌کنید که از نقطهٔ مفروض M به فاصلهٔ l باشد .

۲۷ـ درصفحهٔ P نقطه‌ای معین‌کنیدکه از خط مفروض Δ که باصفحه موازی است ، به فاصلهٔ l واز نقطهٔ مفروض A به فاصلهٔ l' باشد .

۲۸ـ بریکی‌از دوخط متنافرمفروض، نقطه‌ای معین‌کنیدکه ازخط دیگر به فاصلهٔ l باشد .

۲۹ـ خط Δ محمل ضلع مربعی‌است به ضلع l که مرکزش برخط افقی معینی قرار دارد ؛ مربع را بسازید .

۳۰ـ نقطه‌ای چنان تعیین‌کنیدکه از صفحهٔ افقی به فاصلهٔ h و از خط افقی مفروض به فاصلهٔ d وازنقطهٔ مفروض A به فاصلهٔ l باشد .

۳۱ـ برنقطهٔ A صفحه‌ای بگذرانیدکه ازسه نقطهٔ B و C و D به یك فاصله باشد .

۳۲ـ برنقطهٔ A صفحه‌ای بگذرانیدکه از دو نقطهٔ D و C به فواصل l و l' باشد .

۳۳ـ نقطهٔ O واقع در صفحهٔ P مرکز دایره‌ای است از صفحهٔ P به شعاع R ؛ برروی دایره نقطه‌ای بیابیدکه نسبت فواصلش از دو خط واقع در همان صفحه مساوی k باشد .

۳۴ـ صفحهٔ P وخط Δ مفروضند ؛ صفحه‌ای به موازات P چنان رسم کنیدکه قسمتی از Δ که بین دوصفحه محدود می‌شود ، به طول معین l باشد.

۳۵ ـ از نقطهٔ A واقع در صفحهٔ P قطعه‌خطی به طول l چنان رسم کنیدکه طول تصویرش بزرگترین (یاکوچکترین) مقداری راکه ممکن است، داشته باشد .

۳۶ـ مربعی با این معلومات بسازید : تصویر رقوم‌دار ضلع AB و تصویر بی‌رقوم امتداد ضلع BC .

۳۷ـ ازنقطهٔ A واقع در صفحهٔ P خطی درآن صفحه چنان رسم‌کنید که بایکی ازاین خطوط زاویهٔ α بسازد : ۱ـ افقیه ، ۲ـ غیرمشخص.

۳۸ـ دوخط متقاطع D و Δ مفروضند؛ برنقطهٔ تلاقی‌آنها خطی مرور دهید که تصویرش بر تصویر Δ منطبق باشد و خود در فضا با D زاویهٔ β تشکیل دهد .

۳۹ـ دوخط متقاطع A و B داده شده‌اند ؛ بر A صفحه‌ای‌بگذرانید که با B زاویهٔ α بسازد .

۴۰ـ برنقطهٔ O خطی مرور دهیدکه خط مفروض Δ را قطع‌کند و با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ α بسازد .

۴۱ـ برخط مفروض، صفحه‌ای مرور دهیدکه با صفحهٔ مصور قائم آن خط زاویهٔ φ بسازد .

۴۲ـ برخط مفروض، صفحه‌ای‌بگذرانیدکه بادوصفحهٔ مفروض، زوایای متساوی بسازد .

تعریف ـ کنج سه قائمه کنجی است‌که هرسه‌فرجه‌اش قائمه باشند. درچنین‌کنجی سه‌یال، دوبدو برهم عمودند . هرگاه صفحه‌ای‌کنج سه قائمه را قطع‌کند وازرأس‌کنج عمودی برآن صفحه فرودآوریم. موقع‌عمود، نقطهٔ‌تلاقی ارتفاعهای مثلثی است‌که رئوسش نقاط تلاقی یالهای‌کنج باصفحهٔ قاطع‌باشند.

۴۳ـ مطلوب است رسم‌کنج سه قائمه‌ای که رأس S' و یال Δ از آن معین باشند و یك یال دیگرآن با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ α بسازد .

۴۴ـ نقطهٔ مفروض s_7 رأس کنج سه قائمه‌ای است که تصاویر بی‌رقوم هرسه یال‌آن داده شده‌اند ؛ آنها را مدرج کنید .

۴۵ـ آثار سه‌یال‌کنج سه‌قائمه‌ای معلومند ؛کنج را بسازید .

۴۶ـ ازکنج سه‌قائمه‌ای تصاویر بی‌رقوم دویال وآثارآنها داده‌شده‌اند؛ یال سوم را بدست‌آورید .

۴۷ـ خطی به موازات صفحهٔ مفروضی رسم کنید که خط مفروضی را درنقطهٔ معینی قطع‌کند وباهمین خط زاویهٔ α بسازد .

۴۸ـ دو خط متنافر Δ و D و صفحهٔ P داده شده‌اند ؛ خطی موازی باصفحهٔ P چنان رسم‌کنید که با Δ و D زوایای متساوی تشکیل دهد و یکی از دو خط D و Δ را درنقطهٔ معینی قطع‌کند.

۴۹ـ درصفحهٔ مفروض ، خطی چنان رسم‌کنیدکه با خط مفروضی زاویهٔ β بسازد . عدهٔ جوابها ؟

۵۰ـ برنقطهٔ مفروض، صفحه‌ای رسم‌کنیدکه برصفحهٔ مفروض عمود باشد وباصفحهٔ مفروض دیگر زاویهٔ α بسازد .

۵۱- مربع مستطیل ABCD را رسم کنید و آن را نمایش آینه‌ای بدانیدکه شعاع MO درنقطهٔ O به‌آن می‌تابد ؛ شعاع منعکس را رسم کنید . (می‌دانیم که زاویهٔ تابش مساوی است بازاویهٔ انعکاس) . مشخصات آینه و شعاع نور اختیاری است.

۵۲- خطی موازی باصفحهٔ مفروض P چنان رسم‌کنیدکه باصفحهٔ افقی زاویهٔ α بسازد و خط مفروض Δ را قطع‌کند وجزئی ازآن که محدود بین Δ و صفحهٔ مقایسه است ، مساوی l باشد .

فصل ششم

چندوجهیها

۱- تعریف - چندوجهی ، یا کثیرالوجوه ، جسمی است که از هرطرف به یك چندضلعی مستوی محدود باشد . هریك از چندضلعیهایی که جسم را محدود می‌کند **وجه** و هر یك از اضلاع و رئوس آنها را بترتیب **یال** و **رأس** چندوجهی می‌نامند .

چندوجهی ، **محدب** است وقتی که هر یك از وجوه آن را امتداد دهیم ، تمام جسم در یك طرف آن وجه واقع شود .

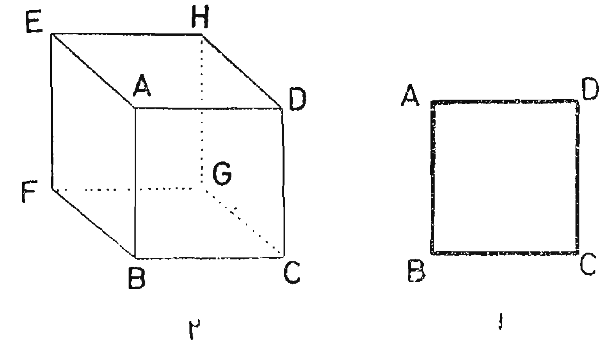
چندوجهی منتظم آن است که تمام وجوه آن چندضلعیهای منتظم متساوی و جمیع فرجه‌های آن متساوی باشند ؛ عدهٔ چند وجهیهای منتظم محدب، منحصر به پنج نوع است و آنها را **اجسام افلاطونی** می‌گویند (چهاروجهی منتظم ، شش‌وجهی منتظم ، هشت‌وجهی منتظم ، دوازده - وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم) .

۲ - نمایش چندوجهی - چندوجهی را به وسیلهٔ تصویرش نمایش می‌دهند ؛ ملخص کامل جسم ، به این ترتیب بدست می‌آید که تصاویر رقومدار رؤس آن را ، بر طبق تعریف هندسی جسم ، دوبدو به یکدیگر وصل‌کنیم .

۳ـ دورهٔ ظاهری ـ دورهٔ ظاهری هرجسم، یك چند ضلعی است که وجوه و یالها و رئوس مرئی چندوجهی در داخل آن دیده می‌شوند ؛

دورهٔ ظاهری یك جسم ، بسته به وضع چشم ناظر ، فرق می‌کند .

مثلاً اگر به مکعبی کاملاً از روبرو نگاه کنیم بقسمی که فقط یك وجه آن را ببینیم ، دورهٔ ظاهری آن ، مربع ABCD است (شکل ۱ـ۱) ؛ ولی هرگاه به‌آن از نقطه‌ای نگاه‌کنیم که سه وجه آن دیده شوند (شکل ۱ـ۲)

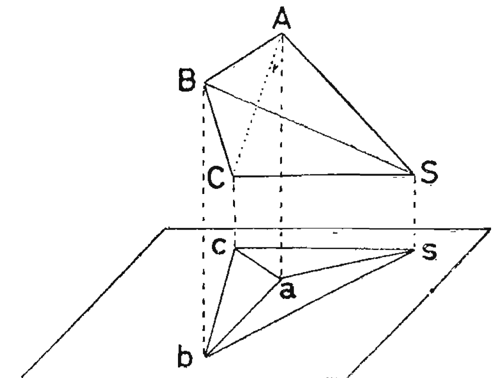


(ش ۱)

دورهٔ ظاهری آن، شش‌ضلعی BCDHEF است .

تصویر دورهٔ ظاهری جسم ، **دورهٔ ظاهری** تصویر آن است .

خطی که یك نقطه را به چشم ناظر مربوط کند، شعاع بصری آن نقطه نامیده می‌شود . برای تعیین دورهٔ ظاهری تصویر جسمی، چنان فرض می‌کنیم که



(ش ۲)

شخص ناظر از فاصلهٔ بینهایت دور به آن جسم نگاه کند و امتداد اشعهٔ بصری او برصفحهٔ تصویر عمود باشد .

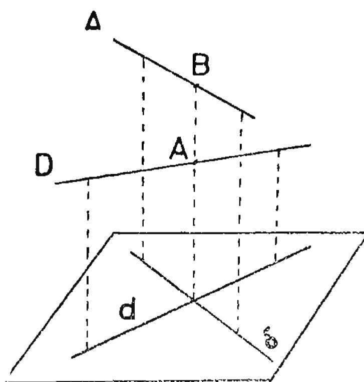
۴ـ مرئی و مخفی ـ بدیهی است که دورهٔ ظاهری جسم ، مرئی است ؛ یعنی دیده می‌شود ؛ اما از یالها و رئوس و وجوه ، برخی مرئی و بعضی مخفی هستند، یعنی وجوه دیگرجسم ، بین چشم ناظر و آنها حایل می‌شوند و آنها را از نظر پنهان می‌دارند .

درتعیین اجزای مرئی و مخفی جسم ، این نکات را باید در نظر داشت :

الف ـ هرگاه رأسی نامرئی باشد، تمام یالهایی که به آن منتهی می‌شوند نامرئی ، یعنی مخفی، خواهند بود ؛ بعکس، تمام یالهایی که بر یك رأس مرئی می‌گذرند ، مرئی هستند .

ب ـ هرگاه یالی مخفی باشد ، دو وجهی که به‌آن محدود می‌شوند، نامرئی هستند ؛ بعکس ، دو وجهی که بر یالی مرئی می‌گذرند ، مرئی هستند .

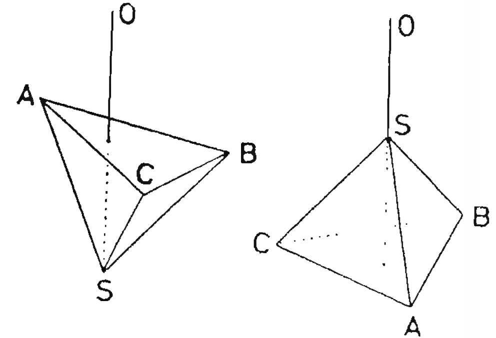
ج ـ از دو یال متنافر، آن‌که به چشم نزدیکتراست، مرئی و دیگری مخفی است . برای اینکه ببینیم از دو خط متنافر Δ و D (شکل ۳) کدام به چشم نزدیکتر است ، کافی است که از نقطهٔ تقاطع تصاویر آنها به چشم وصل‌کنیم ؛ این خط ، D و Δ را در A و B قطع خواهد



(ش ۳)

کرد؛ هر یك از دو نقطهٔ A و B که به صفحهٔ تصویر نزدیکتر باشد، از چشم دورتر بوده و خطی که از آن می‌گذرد مخفی است و خط دیگر که به چشم نزدیکتر است، مرئی می‌باشد.

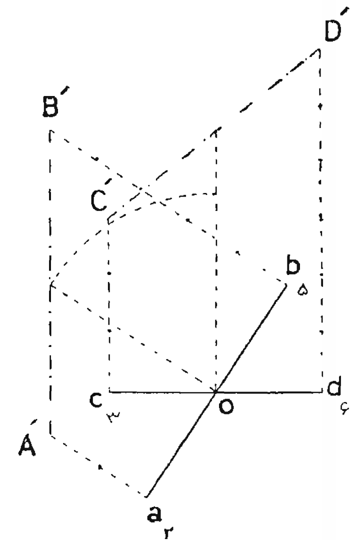
هرگاه چند یال متقارب باشند (شکل ۴)، یا همه مرئی یا همه مخفیند؛ برای تحقیق مطلب، از نقطهٔ تقارب آنها به چشم وصل می‌کنیم؛ اگر خط واصل بدون برخورد با وجهی به چشم برسد (شکل۴، راست)، آن رأس و همهٔ یالهایی که به آن منتهی می‌شوند، مرئی هستند ولی اگر یکی از وجوه جسم بین آن رأس و چشم حایل شود و خط واصل آن وجه را قطع کند (شکل ۴، چپ)، رأس مذکور و یالهای منتهی به آن مخفی خواهند بود.



(ش ۴)

مثال ۱ ـ تحقیق کنید که از دو خط a_2b_5 و c_3d_6 کدام دارای نقطهٔ نامرئی است.

رقوم نقطهٔ o، محل تلاقی ab و cd، را در روی هر دو خط بدست می‌آوریم؛ این نقطه در روی هرخط که رقوم کمتری داشته باشد، مخفی است؛ در شکل ۵،

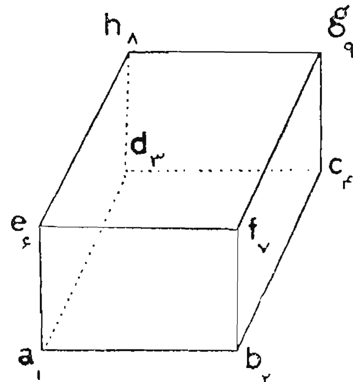


(ش ۵)

خط a_2b_5 دارای نقطهٔ نامرئی است.

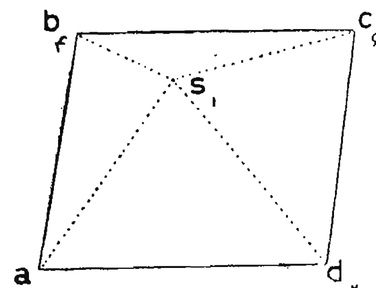
مثال ۲ـ درمتوازی السطوح $a_1b_2c_4d_3e_6f_7g_9h_8$ (شکل۶) یالهای مرئی و مخفی را تعیین کنید.

در این شکل، سه یال به d_3 منتهی می‌شوند و سه یال به f_7؛ از این دو دسته یال، یك دسته مرئی است و یك دسته مخفی؛ برای تشخیص آنها ازیکدیگر، یك یال از هر دسته را در نظر می‌گیریم بطوری که تصویرهایشان متقاطع باشند، مانند a_1d_3 و e_6f_7؛ نقطهٔ تقاطع آنها بر روی e_6f_7 رقوم بیشتری دارد؛ پس e_6f_7 بالاتر است ومرئی است؛ f_7g_9 و b_2f_7 نیز مرئی هستند و سه یال منتهی به d_3 مخفی می‌باشند.



(ش ۶)

مثال ۳ ـ برای تعیین یالهای مرئی و مخفی هرم $s_1a_1b_4c_6d_3$ بطور موقت از رقوم s صرف نظر می‌کنیم و رقوم s را به فرض اینکه در صفحهٔ وجه مقابل باشد پیدا می‌کنیم، تقریباً ۴ حاصل می‌شود؛ چون رقوم s_1 از ۴ کمتر است، s_1 و یالهای منتهی به‌آن مخفیند.

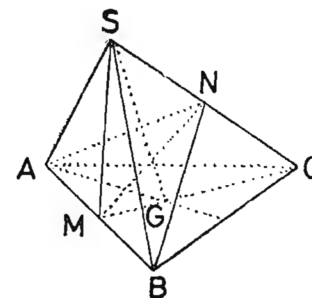


(ش ۷)

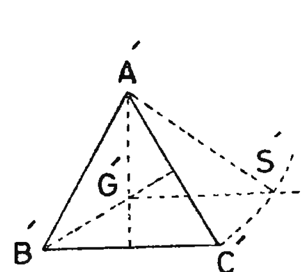
۵ـ چهاروجهی منتظم ـ چهاروجهی منتظم هرمی است مرکب از چهارمثلث متساوی‌الاضلاع و متساوی که سه‌بسه درحول هر رأس جمع

شده باشند (شکل ۸) . برای رسم چهاروجهی منتظمی به یال a ، کافی است که مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ضلع a بسازیم و از G ، محل تلاقی میانه‌های‌آن ، عمودی بر صفحهٔ مثلث اخراج کنیم و در صفحه‌ای که بر این عمود و یکی از رئوس مثلث می‌گذرد، به‌مرکز آن رأس و به شعاع a قوسی رسم کنیم تا عمود را در S قطع‌کند .

راه عملی این است که برعمودی‌که از G برصفحهٔ ABC اخراج می‌شود ، از نقطهٔ G ، طولی مساوی SG ، ارتفاع چهاروجهی ، جدا کنیم : برای تعیین طول SG مثلث متساوی‌الاضلاع A'B'C' را به ضلع a رسم می‌کنیم (شکل ۹) ؛ از G' ، محل تلاقی میانه‌ها ، خطی موازی



(ش ۸)



(ش ۹)

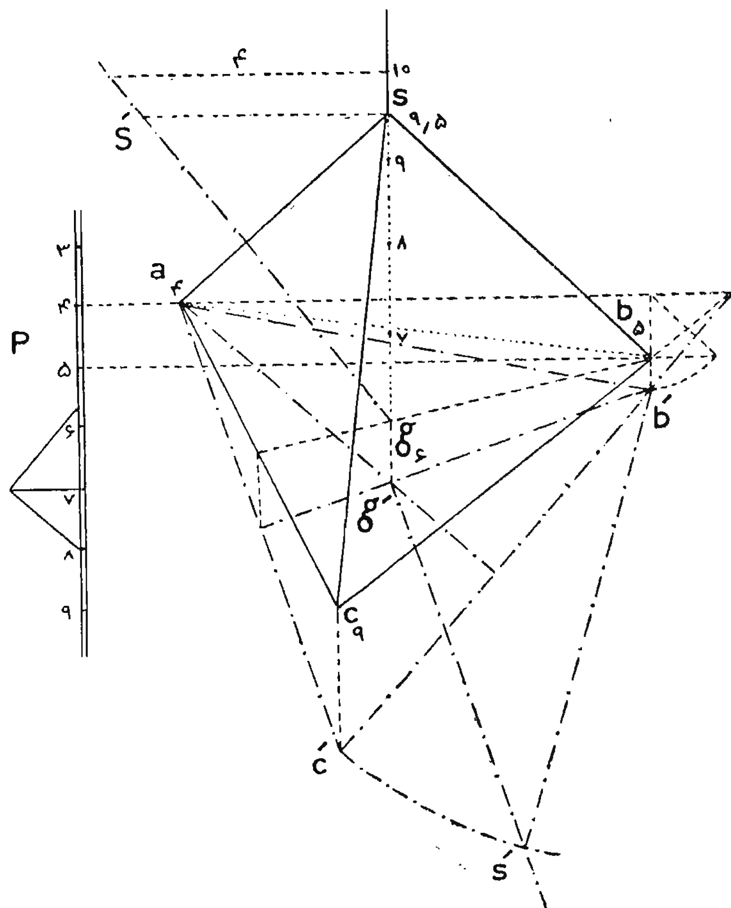
با یك ضلع ، مثلاً B'C' ، می‌کشیم و به مرکز رأس مقابل یعنی A' و با شعاعی برابر a قوسی می‌زنیم تا آن خط را در S' قطع‌کند ؛ G'S' مساوی ارتفاع‌چهاروجهی‌است؛ زیرا که‌مثلث ASG درشکل۸ با مثلث A'S'G' در شکل ۹ متساوی است (اثبات تساوی برعهدهٔ دانش آموزان است .)

در چهاروجهی منتظم ، هردو یال متنافر، مانند AB و SC، برهم عمودند؛ زیرا که نقاط S و C که به یك فاصله از A و B قرارگرفته‌اند، درصفحهٔ عمود منصف AB واقعند . خط MN که اوساط یالهای AB

و CS را به‌هم وصل می‌کند ، عمود مشترك این دو یال است ؛ زیرا که مثلثهای ANB و SMC هر دو متساوی الساقین می‌باشند (چرا ؟) و خط واصل از رأس به‌وسط قاعده ، بر قاعده‌عمود است. خط MN محور تقارن چهاروجهی و صفحات ANB و SMC صفحات تقارن جسمند .

هرچهاروجهی منتظم سه محور تقارن و سه زوج صفحهٔ تقارن دارد .

ملخص - می‌خواهیم چهار وجهی منتظمی بسازیم که یك وجهش



(ش ۱۰)

در صفحهٔ P و a_4b_5 یك ضلع آن وجه باشد .

صفحه را درحول افقیهٔ رقوم ۴ تسطیح کرده مثلث متساوی‌الاضلاعی روی ab' ساخته‌ایم و در آن g' ، تسطیح نقطهٔ تقاطع میانه‌ها ، و نیز طول $s'g'$ را بدست آورده‌ایم؛ آنگاه c' را در c_9 و g' را در g_6 ترفیع کرده از آن عمودی به طول $g's'$ برصفحه اخراج کرده‌ایم ؛ $s_{9/5}$ رأس چهاروجهی است ، شکل را کامل کرده‌ایم . یال a_4b_5 مخفی است .

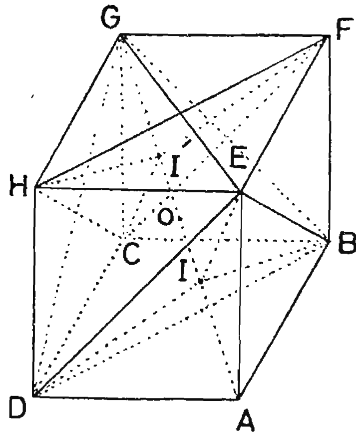
۶ ـ مکعب یا شش‌وجهی منتظم تشکیل می‌شود از شش مربع متساوی که سه‌بسه در حول هر رأس آن جمع شوند . تمام کنجهای آن سه قائمه‌اند . برای ساختن مکعب (شکل ۱۱) کافی است که از رئوس مربع ABCD عمودهایی بر صفحهٔ آن اخراج کنیم و بر روی آنها طولهای AE و BF و CG و DH را برابر ضلع مربع نقل‌کرده انتهای آنها را به هم وصل کنیم .

هرمکعب دارای ۱۲ یال و چهار قطر است . نقطهٔ تلاقی اقطار را مرکز مکعب گویند .

صفحات قطری مکعب ـ هر دو یال متوازی مکعب که در یك وجه آن قرارنگرفته باشند، به یالهای متقابل موسومند ؛ مانند یالهای BF و DH . صفحاتی را که بر دو یال متقابل مکعب بگذرند، صفحات قطری نامند ، مانند صفحهٔ BDHF . بطور کلی هر دو قطر مکعب صفحه‌ای موسوم به صفحهٔ قطری تشکیل می‌دهند .

۷ـ خواص مکعب ✿ :

الف ـ هر قطر مکعب با تمام یالهای آن زوایای متساوی می‌سازد .



(ش ۱۱)

در مکعب شکل ۱۱ ، یکی از قطرها، مثلاً AG، را می‌کشیم و رئوس B و D و E را به G وصل می‌کنیم ؛ سه مثلث ABG و ADG و AEG که سه ضلعشان نظیر بنظیر متساویند، با یکدیگر برابرند و در نتیجه :

$$\widehat{BAG}=\widehat{DAG}=\widehat{EAG}$$

ب ـ سه انتهای سه یال مکعب که بریك رأس می‌گذرند ، در صفحه‌ای واقعند که برقطرمار بر آن رأس عمود است .

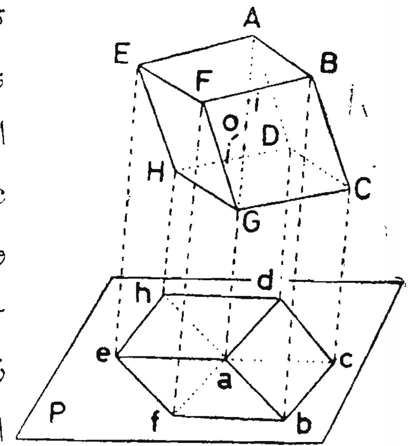
درحقیقت، طول تصویر هر یال بر روی قطر، مساوی‌است باحاصل ضرب طول آن یال در کسینوس زاویهٔ بین یال و قطر ؛ چون تمام یالها با هم برابرند و نیز زوایای آنها با قطر مکعب متساویند ، تصاویر آنها بر روی قطر متساویند و سه تصویری که از یك رأس شروع می‌شوند ، دارای یك انتها هستند ؛ یعنی سه انتهای هرسه یال‌که به انتهای قطری محدود می‌شوند ، بر روی صفحه‌ای واقعند عمود بر آن قطر .

نتیجهٔ ۱ـ سه‌انتهای سه یال مذکور، رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی هستند و تصویر آنها روی قطر ، بر مرکز آن مثلث واقع است .

نتیجهٔ ۲ـ تصاویر یالها بر قطر ، آن را به سه جزء متساوی تقسیم می‌کنند .

ج ـ تصویر مکعب بر روی هر صفحه‌ای که بر قطر آن عمود باشد ، مسدسی است منتظم ـ مکعب ABCDEFGH را بر

صفحهٔ P تصویر می‌کنیم (شکل ۱۲) . تصویر قطر AG ، که بنا به فرض بر صفحهٔ P عمود است ، نقطه‌ای است مانند a ؛ این نقطه تصویر مراکز مکعب و مثلث BDE نیزمی‌باشد ؛ چون صفحهٔ مثلث BDE عمود است بر قطر AG ، موازی می‌شود با صفحهٔ P ؛ بنا بر این تصویر آن روی صفحهٔ P مثلث متساوی‌الاضلاعی‌است مانند bde که مساوی BDEاست؛ بعلاوه نقطهٔ a مرکز دایرهٔ محیطی مثلث bde خواهد بود ؛ و چون نقاط C و F و H بترتیب قرینه های E و D و B نسبت به مرکز مکعبند ، تصاویرآنها نیز قرینه های e و d و b نسبت به نقطهٔ a خواهند بود ؛ از اینجا معلوم می‌شود که نقاط b و c و d و e و f و h روی دایره‌ای واقعندکه مرکزآن a می‌باشد؛ چون جمیع یالهای مکعب باقطر AG یك زاویه دارند ، باصفحهٔ P ، که عمود است بر AG ، متمم همین زاویه را خواهند داشت ؛ از این مطلب معلوم می‌شودکه طولهای تصاویریالها روی صفحهٔ P باهم برابرند و در نتیجه شکل bcdhef شش ضلعی منتظم است .

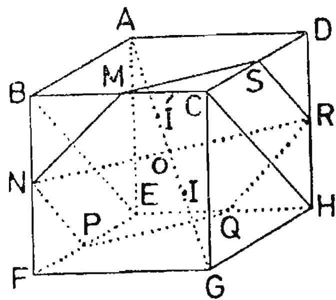


(ش ۱۲)

د ـ اوساط شش یال مکعب که هیچیك برطرفین قطر AG نمی‌گذرند ، رئوس مسدسی هستند منتظم که صفحهٔ آن در وسط قطر AG بر این قطر عمود است .

اولاً : از اتصال اوساط یالهای BC و BF و FE و EH و HD

و DC شش‌ضلعی MNPQRS (شکل ۱۳) حاصل می‌شود که مسطح است ؛ زیراکه خطوط RS و PN که بترتیب با دو خط متوازی CH و BE موازیند، تشکیل صفحه‌ای می‌دهندکه خط NR در آن واقع‌است؛ وچون خطوط MS و PQ با NR موازیند (به چه دلیل ؟) و یك نقطه درصفحهٔ NPRS دارند ، در این صفحه قرار می‌گیرند؛ بنابر این نقاط M و Q در صفحهٔ NPRS واقع می‌شوند یعنی شش‌ضلعی MNPQRS مسطح است .



(ش ۱۳)

ثانیاً : اضلاع شش ضلعی مذکور با هم برابرند ؛ زیرا که هر یك از اضلاع آن مساوی نصف قطری از وجه مکعب می‌باشد ؛ مثلاً RS مساوی است با نصف CH .

ضمناً بسهولت ثابت می‌شود که زوایای شش‌ضلعی نامبرده نیز باهم برابرند و در نتیجه شش‌ضلعی مذکور منتظم است .

ثالثاً : صفحهٔ شش‌ضلعی عمود است بر وسط قطر AG ؛ زیراکه مطابق آنچه در قسمت ب بیان شده ، قطعهٔ II' از قطر AG (ش ۱۱)، تصویرمشترك ۶ یالی از مکعب است‌که هیچیك با قطر AG نقطهٔ مشترك ندارند ؛ حال اگر اوساط این یالها را که همان رئوس شش ضلعیند بر قطر AG تصویرکنیم ، وسط II' یا مرکز مکعب ، تصویر مشترك رئوس شش‌ضلعی خواهد بود ؛ وچون شش‌ضلعی مستوی است ، لازم است صفحهٔ آن که بر وسط قطر AG می‌گذرد، بر این قطر عمود باشد .

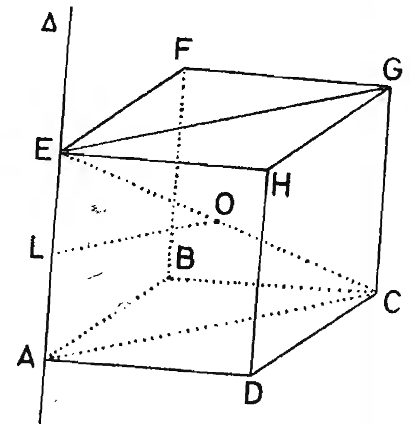
۸ ـ مسئله ـ مطلوب است نمایش مکعبی که مرکز و محمل یکی از یالهای آن معلوم باشند.

حل هندسی ـ هرگاه ABCDEFGH مکعب و O مرکز آن باشد (ش ۱۴) و در صفحهٔ قطری AEGC عمود OL را بر Δ، محمل یال AE، فرودآوریم، در مثلث قائم الزاویهٔ ACE چنین خواهیم داشت:

$$\frac{LE}{LO}=\frac{AE}{AC}=\frac{AE}{AE\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس:

$$LE=LO\frac{\sqrt{2}}{2}$$



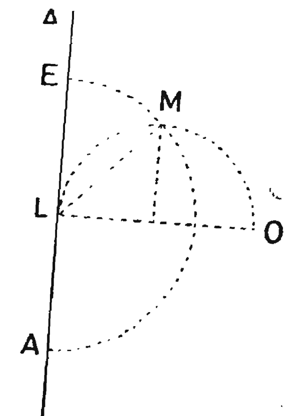
(ش ۱۴)

برای تعیین طولی مساوی AE، از راه ترسیم، کافی است که عمود OL را بر Δ فرود آورده به قطر آن دایره‌ای بزنیم (شکل ۱۵) و از وسط LO خطی بر آن عمود کنیم تا دایره را در M قطع کند؛ به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$LM=LO\frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر به مرکز L وشعاع LM قوسی بزنیم تا Δ را در A و E قطع‌کند، AE یال مکعب است.

بعد از تعیین A و E، قرینهٔ E را نسبت به O پیدا می‌کنیم تا رأس C از مکعب و در نتیجه قطر AC از مربع



(ش ۱۵)

ABCD بدست آید؛ و چون در نقطهٔ A صفحه‌ای بر Δ عمود کنیم، مربع ABCD در این صفحه خواهد بود؛ پس کافی است که در صفحهٔ مذکور، مربعی به قطر AC بسازیم تا دو رأس B و D پیدا شوند و بعد از آن مکعب را تکمیل کنیم.

تمرین

۱ـ نقاط a_1 و c_2 مفروضند. مطلوب است نمایش هرمی‌که رأس‌ش نقطهٔ s_6 و قاعده‌اش مربعی باشد که a_1c_2 قطر آن بوده رأس سومش روی صفحهٔ مقایسه واقع باشد (شرط امکان؟).

۲ـ شش‌ضلعی‌منتظمی به ضلع ۳ سانتیمتر که واقع است درصفحهٔ مفروض P و یك ضلع آن بر صفحهٔ مقایسه منطبق است، قاعدهٔ منشور مایلی است که یالهای آن به طول معلوم l و با اضلاع AB و AF قاعده زاویهٔ ۷۵° می‌سازند؛ منشور را بسازید.

۳ ـ قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای درصفحهٔ‌مقایسه مثلثی به‌اضلاع ۵ و ۶ و ۷ است؛ مطلوب است نمایش هرم در صورتی‌که یالهای‌جانبی آن ۸ و ۹ و ۱۰ باشند.

۴ ـ مثلث abc واقع درصفحهٔ مقایسه قاعدهٔ یك هرم است؛ مطلوب است نمایش آن هرم، درصورتی‌که‌کنج رأس چهارم هرم، سه قائمه باشد.

۵ ـ شش‌ضلعی منتظمی درصفحهٔ مفروض P است و مرکز آن، نقطه‌ای به رقوم ۵ است و یکی از رئوس آن، نقطه‌ای است به رقوم ۳؛ اولا مطلوب است نمایش این مسدس. ثانیاً از مرکزمسدس، عمودی بر صفحهٔ آن اخراج کرده و بر روی عمود طولی برابر ۱۰ سانتیمتر جدا کنید و انتهای آن را رأس هرمی‌که قاعده‌اش شش‌ضلعی مذکور باشد، اختیارکرده هرم‌را نمایش‌دهید.

۶ ـ چهارضلعی ABCD واقع در صفحهٔ مقایسه، قاعدهٔ منشور مایلی است که یالهای جانبی آن با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازند و تصویر افقی یالی که برنقطهٔ D می‌گذرد، با BD زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل می‌دهد؛ منشور را رسم‌کنید: طول یال منشور، ۵ است.

۷ـ نقاط $a_{۲}$ و $b_{۴}$ داده شده‌اند (ab برابر ۳ است) ؛دونقطهٔ مذکور، رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی هستند که رقوم رأس‌سوم آن، ۳ است ؛ مثلث را بسازید و بر روی آن ، یك‌چهاروجهی منتظم بنا کنید .

۸ ـ چهاروجهی منتظم SMNP را با این مشخصات‌بسازید : M و N داده شده‌اند و وجه SMN با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ °۶۰ می‌سازد .

۹ ـ در مکعب ABCDEFGH قطر AG افقیه‌ای به‌رقوم ۵ است و تصاویر A و G داده شده‌اند ؛ در صورتی که : الف ـ یکی از قطرهای دیگرجسم نیز افقی باشد، ب ـ یکی‌از یالهایی‌که بر A می‌گذرند افقی‌باشد، مکعب را بسازید .

۱۰ ـ دو نقطهٔ $a_{۱}$ و $b_{۴}$ به‌فاصلهٔ حقیقی ۵ از یکدیگراختیار کنید ؛ این دو نقطه دو رأس مربعی هستندکه صفحه‌اش با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ °۷۵ می‌سازد ؛ رقوم دو رأس دیگر از رقوم $a_{۱}$ و $b_{۴}$ کمتر است . بر روی مربع، مکعب مستطیلی بسازید که طول قطرش مساوی ۸ باشد .

۱۱ـ $m_{۲}$ و $n_{۳}$ و $p_{۵}$ ($mn=۴$ و $pn=۵$ و $mp=۶$) سه رأس هرمی هستند که یال SM آن با MN و MP زوایای °۶۰ می‌سازد ؛ ارتفاع هرم ۴ و رأس S بالای صفحهٔ MNP است ؛ ملخص این هرم را کامل کنید .

۱۲ ـ سه نقطهٔ $a_{۵}$ و $b_{۵}$ و $c_{۵}$ رئوس مثلثی هستند به‌اضلاع $ab=۳$ و $ac=۶$ و $bc=۵/۵$ ؛ این مثلث قاعدهٔ هرمی است که فرجه‌های AB و BD و DC آن بترتیب ۶۰ و ۴۵ و ۳۰ درجه‌اند ؛ هرم را بسازید . رأس هرم بالای صفحهٔ مقایسه است .

بخش دوم

هندسهٔ ترسیمی

فصل اول

نقطه

مقدمه

۱ ـ قسمتی از هندسه‌که درآن هرنقطه به‌وسیلهٔ تصاویرش بردوصفحه نمایش‌داده می‌شود ، **هندسهٔ ترسیمی** نام دارد. هندسهٔ ترسیمی، بخصوص، مورد نیاز مهندسان و معماران است ؛ اما در زندگی عادی هم از آن استفاده می‌توان‌کرد ؛ مثلا اگر بخواهید میزی را بامشخصات خاصی به نجارسفارش دهید ، به‌جای اینکه مدتی وقت خود را صرف توضیح جزئیات میز کنید ، کافی است که نقشهٔ دقیق میز را به کمك قواعد هندسهٔ ترسیمی رسم‌کرده در اختیار او قرار دهید . یك نقشهٔ خوب از چند صفحه توضیحات بهتر است .

هندسهٔ ترسیمی درحقیقت مجموعهٔ قواعدی است‌که به‌کمك‌آنها می‌توان اجسام فضایی یعنی سه بعدی را ، آنچنانکه در حقیقت هستند ، برروی دو صفحهٔ مستوی نمایش داد ، یا مسائل هندسهٔ فضایی را به کمك قواعد هندسهٔ مسطحه حل و رسم کرد .

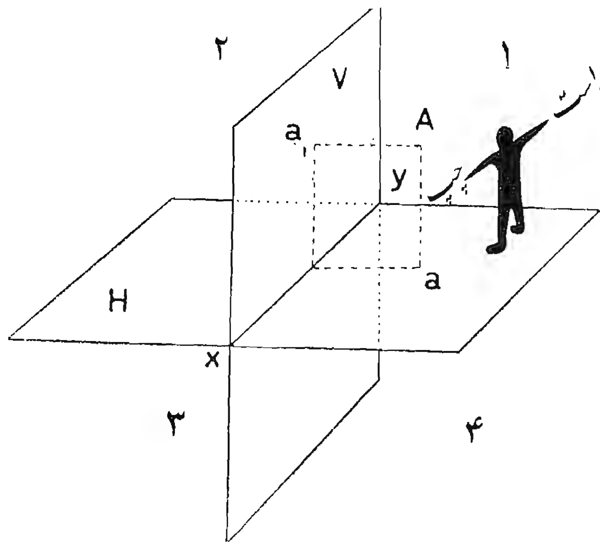
این قسمت از ریاضیات عملی بسیار سهل و جالب و شیرین است واگر با نظم و دقت فرا گرفته شود تسلط ، یافتن برآن کاری است آسان .

نمایش نقطه

۲ ـ صفحات تصویر ـ دوصفحهٔ عمود برهم H و V (شکل۱) را در نظرگرفته هرنقطه را به وسیلهٔ تصاویرش بر آن دو صفحه مشخص می‌سازیم .

شرط اصلی بین صفحات تصویر، عمود بودن آنها بریکدیگر است. چون معمولا تصویر یا نقشه را برای مطالعه ، روی سطحی افقی

مانند میز باید قرار داد ، صفحهٔ تصویر H را ، که در حقیقت همان صفحهٔ شکل است ، موازی با صفحهٔ افقی حقیقی فرض می‌کنند و آن را **صفحهٔ افقی تصویر** می‌نامند وصفحهٔ دیگرV را که بر H عمود است، **صفحهٔ قائم تصویر** می‌گویند. در حالی که H با افق موازی نباشد. باز اصطلاح صفحات افقی و قائم برای صفحات تصویربکار می‌رود .



(ش ۱)

فصل مشترك صفحات افقی و قائم تصویررا **خطزمین** یا **خط‌الارض** می‌نامند و آن را با xy نمایش می‌دهند . برای نوشتن حروف x و y همیشه به این قاعده عمل می‌کنیم : اگر شخصی روی صفحهٔ افقی و روبروی صفحهٔقائم بایستد (شکل ۱) ، در انتهای خط زمین که طرف چپ اوست ، x و در انتهایی‌که طرف راست اوست ، y می‌نویسیم .

صفحهٔ افقی‌تصویر، فضا را به دوناحیه تقسیم می‌کند که یکی بالا و دیگری زیرآن است؛ همچنین به‌وسیلهٔ صفحهٔ قائم نیز فضا به دوناحیهٔ

جلو و عقب تقسیم می‌شود ؛ بنابراین، از تقاطع‌دو صفحهٔ تصویر ، فضا به چهار ناحیه تقسیم می‌شود ؛ مطابق قرار داد ، ناحیهٔ بالای صفحهٔ افقی و جلو صفحهٔ قائم (نسبت به ناظرمزبور) را ناحیهٔ **اول** و نواحی دیگررا ، مطابق شکل ۱ ، نواحی **دوم** و **سوم** و **چهارم** می‌نامند .

۳ ـ تصاویر نقطه ـ هرگاه a و a_1 (شکل ۲) تصاویر نقطهٔ A برصفحات‌افقی وقائم باشند، a را **تصویرافقی A** و a_1 را **تصویر قائم A** گویند .

صفحه‌ای که بر دو خط Aa و Aa_1 بگذرد، برهردو صفحهٔ تصویر عمود است و درنتیجه برفصل مشترکشان، xy ، هم عمود می‌شود و xy را در α و صفحات تصویر را در αa و αa_1 قطع می‌کنند که هردو بر xy عمودند .

(ش ۲)

صفحهٔ aAa_1 ، و بطورکلی هرصفحهٔ عمود برخط زمین را **صفحهٔ نیمرخ** می‌نامند .

فصل مشترکهای هرصفحهٔ نیمرخ باصفحات تصویر، بر xy عمودند.

از روی تصاویر a و a_1 می‌توان به نقطهٔ A رسید ؛ به این‌ترتیب که از a عمودی بر صفحهٔ افقی و از a_1 عمودی بر صفحهٔ قائم اخراج می‌کنیم؛ این دو عمود که در یك صفحهٔ نیمرخ واقعند، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که همان نقطه‌ای است‌که a و a_1 تصویرهای آنند.

۴ ـ بُعد و ارتفاع نقطه ـ فاصلهٔ هر نقطه از صفحهٔ قائم تصویررا **بُعد** و فاصله‌اش از صفحهٔ افقی تصویر را **ارتفاع** آن نقطه گویند .

از مستطیل $Aa_1\alpha a$ (شکل ۲) بسهولت فهمیده می‌شود که :

بعد هر نقطه مساوی است با فاصلهٔ تصویر افقی آن از خط زمین و ارتفاع هر نقطه مساوی است با فاصلهٔ تصویر قائمش از خط زمین .

بُعد نقطه‌را باحرف e و ارتفاعش را باحرف h ([1]) نمایش‌می‌دهیم.

در گفتن و نوشتن ، معمولاً بعد را پیش از ارتفاع می‌آوریم .

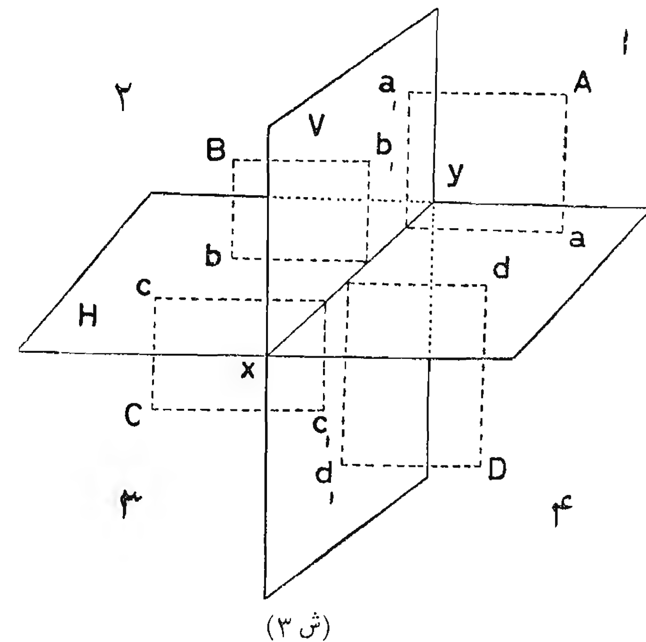
صفحهٔ افقی تصویر، مبدأ ارتفاعهاست ؛ ارتفاع نقاط واقع در آن مساوی صفر است و ارتفاع‌نقطه‌ای را که دربالا یادر زیرآن باشد، بترتیب مثبت یا منفی منظور می‌داریم .

صفحهٔ قائم تصویر، مبدأ بعدهاست؛ بر حسب آنکه نقطه‌ای جلو صفحهٔ قائم یا روی آن یا عقب آن باشد ، بترتیب بعدش مثبت یا صفر یا منفی‌گفته می‌شود .

جدول زیر ، علامت بعد و ارتفاع نقاط را در هر یك از نواحی چهارگانه نشان می‌دهد :

ناحیه	علامت بُعد	علامت ارتفاع	مثال در شکل ۳
اول	+	+	نقطهٔ A
دوم	−	+	نقطهٔ B
سوم	−	−	نقطهٔ C
چهارم	+	−	نقطهٔ D

۱ ـ e حرف اول éloignement (بُعد) و h حرف‌اول hauteur (ارتفاع) است .

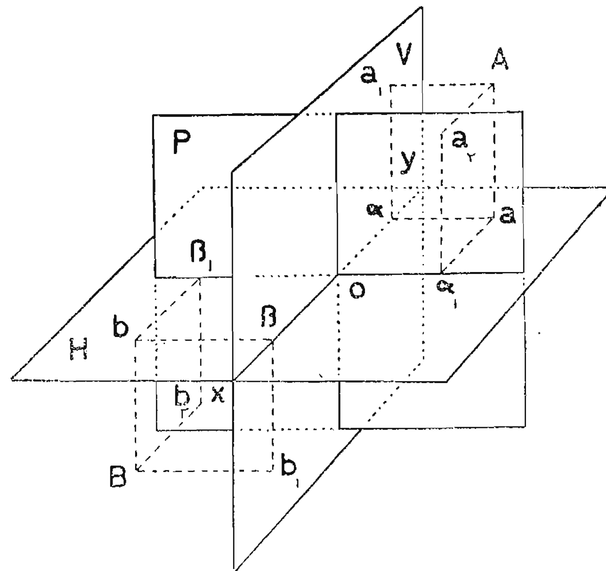


(ش ۳)

۵ ـ تبصره ـ با مختصری توجه به شکل ۳ ، فهمیده می‌شود که بعد و ارتفاع ، برای مشخص‌کردن نقطه کافی نیستند؛ زیرا که اگرمثلاً فرض کنیم بعد و ارتفاع نقطهٔ A مساوی e و h باشند ، این اعداد ، بعد و ارتفاع تمام نقاط واقع برخطی هستند که از A به موازات xy کشیده شود ؛ پس نقاط بیشماری به بعد e و ارتفاع h وجود دارند . برای تعیین یك نقطهٔ مشخص ، علاوه بر بعد و ارتفاع آن ، فاصله‌اش از صفحهٔ معین دیگری هم باید در دست باشد [1] ؛ این صفحه ، معمولاً صفحهٔ نیمرخی

۱ـ در جبر و مقابله هم‌گفته می‌شود که نقطه در فضا به‌وسیلهٔ فواصلش ازسه صفحهٔ متقاطع وعمود برهم، به‌نام صفحات مختصات ، مشخص می‌شود؛ این‌فواصل‌راطول‌وعرض وارتفاع نقطه‌می‌گویند وبه x و y و z نمایش‌می‌دهند.

مانند P (شکل ۴) اختیار می‌شودکه در حدود xy این خط را درنقطه‌ای مانند o قطع کند . فاصلهٔ نقطه را از این صفحه ، **طول** می‌نامیم . بر



(ش ۴)

حسب قرارداد ، طول نقاطی که در طرف راست صفحهٔ P واقعند ، مثبت و آنهایی که در طرف چپ آن قرار می‌گیرند ، منفی اختیار می‌شوند . **طول و بعد و ارتفاع را مختصات نقطه می‌نامیم .**

در شکل ۴ ، مختصات نقطهٔ A هر سه مثبتند ؛ طول آن oα ، بعد آن αa و ارتفاعش αa_1 است . مختصات B هرسه منفی هستند . در نوشتن مختصات، از چپ به راست ، اول طول سپس بعد و در آخرارتفاع را می‌نویسیم .

تمرین ۱ ـ صفحات افقی و قائم و نیمرخ را مانند شکل ۴ رسم کنید و نقاط زیر را مشخص سازید :

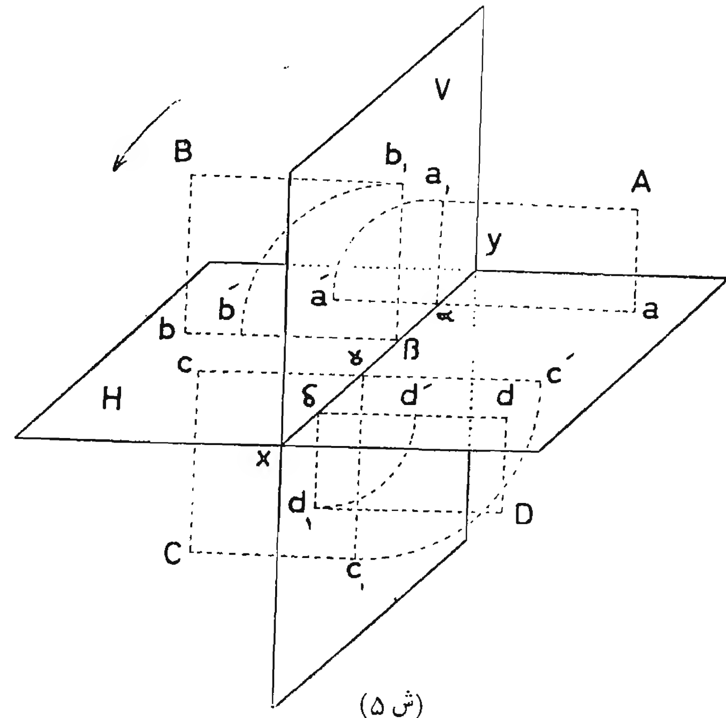
A (۵ و ۳ و ۲) (یعنی به طول ۲ و بعد ۳ و ارتفاع ۵)

B (۴ و ۲ و −۱)   C (۴ و ۲ و ۳)

D (−۲ و ۱ و −۴)   E (۴ و ۰ و ۰)

F (۰ و ۵ و ۴)   G (۰ و −۱ و ۰)

۶ ـ تسطیح صفحهٔ قائم تصویر برصفحهٔ افقی ـ برای نمایش تصاویر ، صفحه‌ای جز یك صفحه مانند صفحهٔ کاغذ یا تخته ، در اختیار نداریم ؛ پس باید هر دو تصویر ، یعنی تصاویر افقی و قائم را بر روی یك صفحه نمایش دهیم ؛ برای این کار ، پس از آنکه تصاویر افقی و قائم را بدست آوردیم ، صفحهٔ قائم را درحول xy به‌اندازهٔ °۹۰ درجهت مثبت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا برصفحهٔ افقی منطبق شود (شکل ۵) .



(ش ۵)

این عمل را تسطیح صفحهٔ قائم برصفحهٔ افقی می‌گویند . پس از تسطیح، نیمهٔ فوقانی صفحهٔ قائم بر نیمهٔ مؤخر صفحهٔ افقی ، و نیمهٔ تحتانی صفحهٔ قائم بر نیمهٔ مقدم صفحهٔ افقی منطبق می‌شود .

با توجه به‌اینکه حروف x و y را بترتیب درطرف چپ و راست ناظری نوشته‌ایم که بالای صفحهٔ افقی و رو به‌صفحهٔ قائم ایستاده باشد، **نیمهٔ مقدم صفحهٔ افقی را زیرخط زمین و نیمهٔ مؤخرآن‌را بالای خط زمین** اصطلاح می‌کنیم .

حال اگر در شکل ۵ مثلاً نقطهٔ A را در نظر بگیریم، a_1 تصویر قائمش ، پس از تسطیح صفحهٔ قائم برصفحهٔ افقی ، به وضع a' در می‌آید ؛ a' را تصویر قائم A می‌گوییم . با توجه به اینکه αa_1 در حال دوران همیشه بر xy عمود می‌ماند و پس از انطباق بر صفحهٔ افقی هم که به وضع $\alpha a'$ در می‌آید بر xy عمود است ، نتیجه می‌گیریم که :

الف ـ a و a' بر روی یك خط عمود بر xy واقعند ؛ این خط را **خط رابط** می‌گویند ، پس :

> **الف ـ تصاویر افقی و قائم هر نقطه بر روی یك خط رابط واقعند .**
> **ب ـ فاصلهٔ تصویر افقی نقطه از خط زمین مساوی بعد نقطه وفاصلهٔ تصویر قائم آن ازخط زمین مساوی ارتفاع نقطه است .**

ب ـ تصویر افقی هر نقطهٔ واقع در نواحی اول یا چهارم ، یعنی نقاطی که جلو صفحهٔ قائمند و بعدشان مثبت است ، زیر خط زمین واقع می‌شود و تصویر افقی هر یك از نقاط نواحی دوم و سوم ، که بعدشان منفی است ، بالای خط زمین می‌افتد .

ج ـ تصویر قائم نقاط واقع در نواحی اول و دوم ، که ارتفاعشان مثبت است، بالای xy واقع می‌شود و تصاویرقائم نقاط واقع درناحیه‌های سوم و چهارم ، که ارتفاعشان منفی است ، زیر xy می‌افتند .

قسمتهای ب و ج را به‌این صورت خلاصه می‌کنیم :

زیر خط زمین ، برای نمایش بعدهای مثبت و بالای آن، برای نمایش بعدهای منفی بکارمی‌رود ؛ و نیز بالای xy ، برای ارتفاعهای مثبت و زیر آن ، برای نمایش ارتفاعهای منفی است .

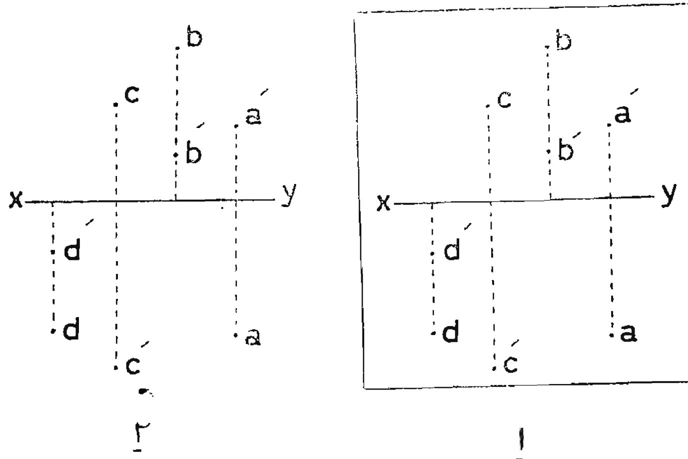
وضع صفحه نسبت به خط زمین	علامت بعد	علامت ارتفاع
زیر xy	+	−
بالای xy	−	+

بطوریکه دانسته شد، هر نقطه دارای یك تصویر افقی و یك تصویر قائم است و این دو تصویر بر روی یك رابط قرار دارند. برای اینکه از دوتصویر نقطه به‌خود نقطه برسیم ، صفحهٔ قائم را که پس از تسطیح ، بر صفحهٔ افقی واقع شده است ، در حول xy به‌اندازهٔ 90° در جهت منفی مثلثاتی دوران می‌دهیم تا به‌وضع عمود بر صفحهٔ افقی در آید و a' به وضع a_1 (شکل ۵) قرار گیرد ؛ آنگاه مطابق آنچه در قسمت آخر شمارهٔ ۳ همین فصل گفتیم ، عمل می‌کنیم تا A بدست آید .

۷ ـ پس از تسطیح صفحهٔ قائم (شکل ۵) بر صفحهٔ افقی ، شکل

حاصل بر روی صفحهٔ کاغذ (یا تخته) به‌صورت شکل (۱ـ۶) خواهد بود ؛ اما به‌ملاحظهٔ اینکه صفحه محدود نیست ، از رسم مستطیل حدود شکل خودداری کرده و به رسم xy اکتفا می‌کنیم (شکل ۲ـ۶) .

نقطه را با دو حرف a و a' می‌خوانیم ، مانند نقطهٔ aa' ؛ یا



(ش ۶)

با یك حرف بزرگ ، مانند نقطهٔ A . در هندسهٔ ترسیمی هروقت هم‌که نقطه را با حرف بزرگ بخوانیم ، با تصاویرش نمایش می‌دهیم ؛ مثلاً می‌گوییم نقطهٔ B یا نقطهٔ C ولی آنها را به bb' یا cc' نمایش می‌دهیم.

مثال ـ درشکل ۷ نقطهٔ aa' در ناحیهٔ اول است ، زیرا که بعد و ارتفاع مثبت دارد ؛ ee' روی صفحهٔ قائم و بالای صفحهٔ افقی است ؛ ff' روی صفحهٔ افقی و جلو صفحهٔ قائم و gg' بر خط زمین واقع است.

۸ ـ نقاط واقع برصفحات نیمساز فرجه ـ صفحاتی که فرجه‌های بین صفحات تصویر را نصف کنند، **نیمساز فرجه** نامیده می‌شوند .

نیمساز فرجهٔ اول ، فرجه‌های نواحی اول و سوم را نصف می‌کند ؛

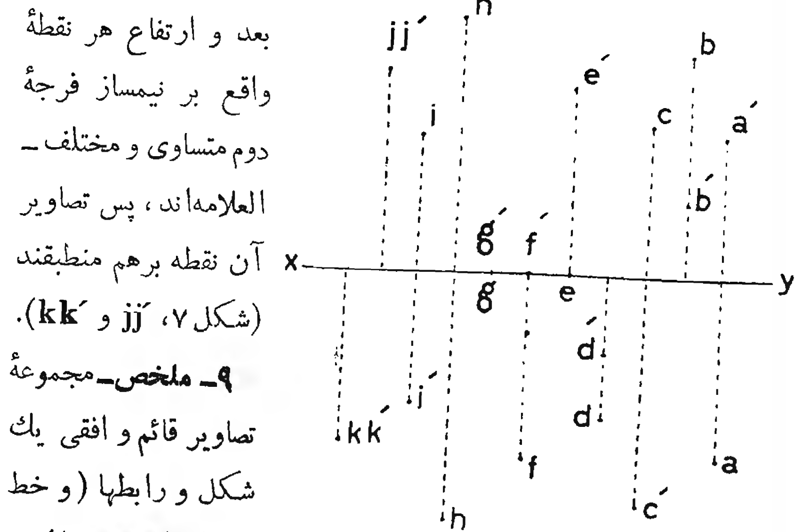
نیمساز فرجهٔ دوم ، منصف فرجه‌های نواحی دوم و چهارم است .

چون نقاط واقع برهرصفحهٔ نیمسازفرجه، از دو وجه فرجه به یك فاصله‌اند ، بعد و ارتفاع هر یك از این نقاط ، از حیث قدر مطلق متساویند .

هر نقطه‌که بر نیمساز فرجهٔ اول باشد ، بعد و ارتفاعش متساوی و متحدالعلامه‌اند ، پس تصاویرش نسبت به خط زمین قرینهٔ یکدیگرند (شکل ۷ ، ´hh و ´ii)؛

بعد و ارتفاع هر نقطهٔ واقع بر نیمساز فرجهٔ دوم متساوی و مختلف‌العلامه‌اند ، پس تصاویر آن نقطه برهم منطبقند (شکل ۷، ´jj و ´kk).

۹ـ ملخصـ مجموعهٔ تصاویر قائم و افقی یك شکل و رابطها (و خط زمین) را **ملخص یا اپور** شکل می‌گویند .



(ش ۷)

تمرین ۴ـ مطلوب است رسم ملخص این نقاط :

الف ـ نقطهٔ A به طول ۲ که بعد و ارتفاعش ۲ و ۵ باشند .

ب ـ نقطهٔ B به طول ۲ ـ واقع درناحیهٔ سوم به فاصلهٔ ۶ ازخط زمین که قدر مطلق بعدش ۴ باشد .

ج ـ نقطهٔ C بطول ۲ واقع درصفحهٔ قائم‌که به فاصلهٔ ۴ ازخط زمین و بالای آن باشد .

۱۰ ـ قرارداد ـ در ملخصها ، برای رسم خطوط ، نکات زیر را مراعات باید کرد :

الف ـ خطوط اصلی مرئی باخط تمام و خیلی ظریف (——) رسم شوند .

ب ـ خطوط جواب مسائل باخط تمام و درشت تر(——)رسم شوند .

ج ـ خطوط غیر مرئی بانقطه چین (..........) کشیده شوند .

د ـ خطوط رابط با مرکب قرمز یا آبی خط چین و سایرخطوط با سیاه رسم شوند ؛ هرجا که رسم رابطها با مرکب رنگین ممکن نباشد ، آنها را با خط چین (— — — —) رسم کنید .

ه ـ خطوط فرعی عموماً با خط چین رسم شوند .

و ـ خطوط غیر اصلی ولی مهم با خط و نقطه (—.—.—.—) کشیده شوند .

خلاصهٔ مطالب مهم

۱ـ هر نقطه به وسیلهٔ تصاویرش بر دوصفحه ، موسوم به‌صفحات‌تصویر ، مشخص می‌شود .

۲ـ شرط اصلی بین‌صفحات تصویر ، عمود بودن‌آنها بریکدیگراست.

۳ـ یکی از صفحات تصویر را افقی و دیگری را قائم می‌نامند .

۴ـ فصل مشترك صفحات افقی و قائم تصویر ، خط زمین است . برای اسم گذاری خط زمین، x را طرف چپ و y را طرف راست می‌نویسند .

۵ ـ دو تصویر يك نقطه بر روی يك رابط قرار دارند .

۶ـ فاصلهٔ نقطه از صفحهٔ افقی ، برابر فاصلهٔ تصویر قائم آن از خط زمین است و ارتفاع نقطه نام دارد . فاصلهٔ نقطه از صفحهٔ قائم ، برابرفاصلهٔ تصویر افقی آن از خط زمین است و بُعد نقطه نام دارد .

۷- از تقاطع صفحات تصویر ، فضا به چهار ناحیه تقسیم می‌شود . در ناحیهٔ‌اول که بالای افق وجلوصفحهٔ قائم است، بعد و ارتفاع مثبت است ؛ در ناحیهٔ دوم ، یعنی بالای افق و عقب صفحهٔ قائم ، بعد منفی و ارتفاع مثبت است؛ درناحیهٔ سوم، بعد و ارتفاع‌هردو منفی، و در ناحیهٔ چهارم، بعد مثبت و ارتفاع منفی است .

۸- دوتصویر هر نقطهٔ واقع درصفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول، نسبت به خط- زمین قرینهٔ یکدیگرند .

۹- دوتصویرهر نقطهٔ واقع درصفحهٔ‌نیمسازفرجهٔ‌دوم، بریکدیگرمنطبقند.

۱۰- فاصلهٔ هر نقطه از خط زمین مساوی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که یك ضلعش مساوی بعد نقطه و ضلع دیگرش مساوی ارتفاع نقطه باشد .

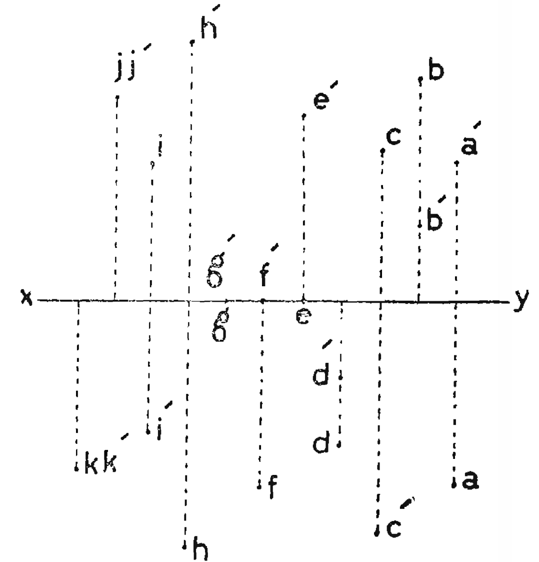
تمرین

۶- درشکل ۸ معین‌کنیدکه هرنقطه درکدام ناحیه یا روی‌کدام‌صفحه است و معین کنیدکه هریك بین یکی ازصفحات نیمساز فرجه و صفحهٔ افقی است یا بین نیمساز فرجه و صفحهٔ قائم قرار دارد .

۷- نقطه‌ای در روی نیمساز فرجهٔ اول پیدا کنید که فاصله‌اش از خط زمین ۶ باشد ؛ عدهٔ جوابها ؟

۸- نقطهٔ aa' را در ناحیهٔ اول اختیار کرده وضع آن را ، نسبت به‌صفحات تصویر و نیمساز فرجه ها ، بسنجید .

۹- عین مسئلهٔ ۸ در مورد نقطه‌ای واقع‌در ناحیهٔ چهارم .



(ش ۸)

۱۰- نقطهٔ ll' در صفحهٔ قائم تصویر داده شده است ؛ قرینهٔ آن را نسبت به صفحهٔ افقی تصویر بدست آورید .

۱۱- نقطهٔ mm' در صفحهٔ افقی تصویرداده شده است ؛ قرینهٔ‌آن را نسبت به صفحهٔ قائم تصویر بدست آورید .

۱۲- نقطهٔ bb' داده شده است ؛ قرینه‌هایش را نسبت به صفحات افقی و قائم تصویر بدست آورید .

۱۳- نقطهٔ cc' در دست است ؛ قرینهٔ آن را نسبت به خط زمین معین کنید .

۱۴- نقطه‌ای داده شده است ؛ قرینهٔ آن را نسبت به صفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول بدست آورید .

۱۵- نقطه‌ای داده شده است ؛ قرینهٔ آن را نسبت به صفحهٔ نیمساز فرجهٔ دوم معین‌کنید .

۱۶- مجموع بعد و ارتفاع نقطه‌ای وفاصلهٔ آن ازخط زمین در دست است؛ تصاویر آن را رسم‌کنید درصورتی‌که طول آن(فاصله‌اش از صفحهٔ نیمرخ عمود بر وسط xy) ۳ باشد .

۱۷- تفاضل بعد و ارتفاع یك نقطه و فاصلهٔ‌آن از خط زمین و طول آن معلوم است ؛ نقطه را بدست آورید .

۱۸- حاصل‌ضرب بعد و ارتفاع نقطه‌ای وفاصلهٔ‌آن از خط زمین‌داده شده‌اند ؛ نقطه را بدست آورید .

۱۹- نظیرمسئلهٔ ۱۸ را درصورتی‌که به جای حاصل ضرب ، خارج‌قسمت معلوم باشد ، حل‌کنید .

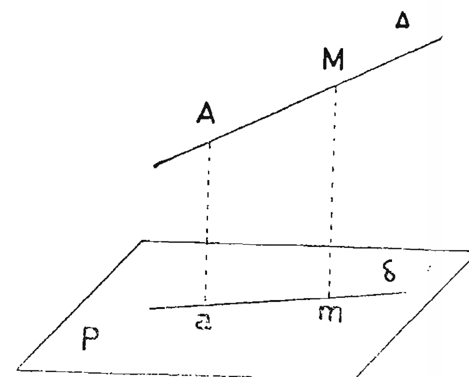
۲۰- فاصلهٔ دو نقطهٔ (۲ و ۵ و ۲) A و (۷ و ۱ و ۲) B را از یکدیگرحساب‌کنید .

فصل دوم

خط

۱ ـ قضیه ـ تصویر خط مستقیم خطی است مستقیم .

برهان ـ خط Δ و صفحهٔ تصویر P مفروضند (شکل ۱). نقطه‌ای مانند A از خط را در a تصویر می‌کنیم ؛ صفحه‌ای که بر Δ و Aa می گذرد ، صفحهٔ P را در امتداد خط مستقیمی‌مانند δ قطع‌می‌کند؛ صفحهٔ ΔAa تنها صفحه‌ای است‌که بر Δ می‌گذرد و بر P عمود است ، و اگر از هر نقطه مانند M واقع بر Δ عمودی بر P فرود آوریم ، این عمود درصفحهٔ ΔAa واقع می‌شود وصفحهٔ P را درنقطه‌ای مانند m ، تصویر M ، واقع بر δ قطع می کند ؛ یعنی تصاویر نقاط مختلف خط Δ بر صفحهٔ P ، روی δ واقع می‌شوند ؛ پس تصویر خط Δ خطی است مستقیم منطبق بر δ .

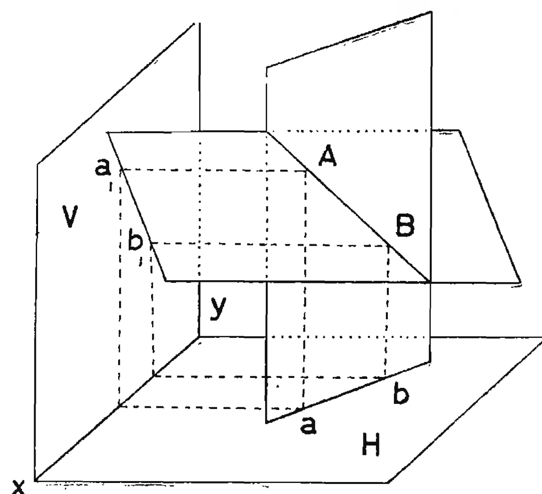


(ش ۱)

۲ـ تعریف ـ صفحه‌ای را که بر Δ بگذرد و برصفحهٔ تصویرعمود

باشد ، **صفحهٔ‌مصور** Δ می‌نامند .

۳ـ تصاویر یك‌خط درهندسهٔ ترسیمی ـ هرگاه بر خطی مانند AB (شکل۲) دوصفحه عمود بر صفحات افقی وقائم تصویرمرور دهیم تاآنها را بترتیب در ab و a_1b_1 قطع‌کنند،



(ش ۲)

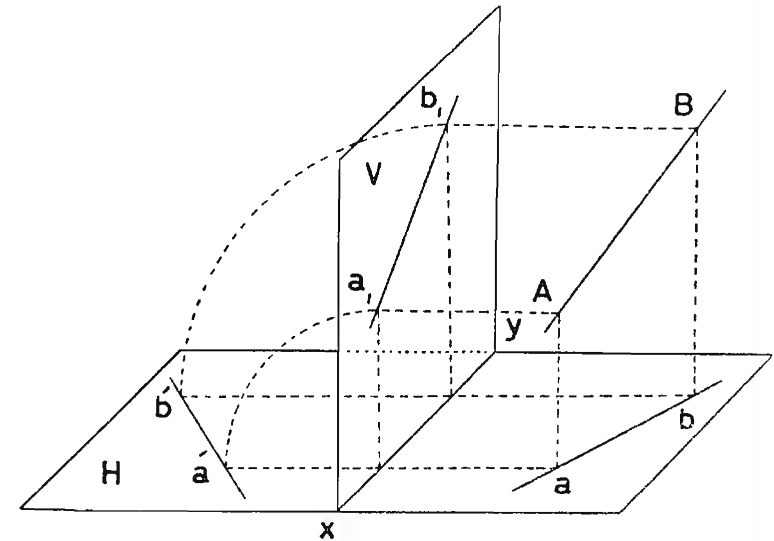
ab و a_1b_1 را تصویر های **افقی وقائم** AB می‌نامیم . از دو صفحهٔ نامبرده‌که بر AB می‌گذرند، آن‌را که برصفحهٔ افقی تصویر عموداست ، **صفحهٔ مصور قائم** و دیگری را که بر صفحهٔ قائم تصویر عمود است ، **صفحهٔ مصور منتصب** می‌نامند .

بدیهی است‌که تصاویرهر نقطه‌که برخطی واقع باشد، بر تصاویرآن خط واقع می‌شوند .

۴ـ از روی ab و a_1b_1 ، تصویرهای یك‌خط ، می‌توان خود خط را به این نحو معین کرد : بر ab و a_1b_1 دو صفحه بترتیب عمود بر H و V مرور دهیم (شکل۲) ، این دوصفحهٔ غیرمتوازی فصل مشترکی‌دارند که همان خط مطلوب‌است ، یعنی خطی است‌که ab و a_1b_1 تصویرهای افقی وقائم آن هستند .

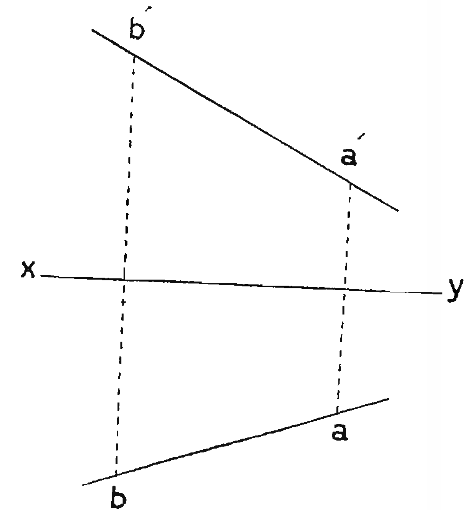
۵ـ برای رسم ملخص خط مستقیم ، صفحهٔ قائم تصویررا در حول

xy برصفحهٔ افقی تسطیح می‌کنیم (شکل ۳ـ۱) ، سپس آن را به صورت شکل ۳ـ۲ نمایش می‌دهیم .



۱

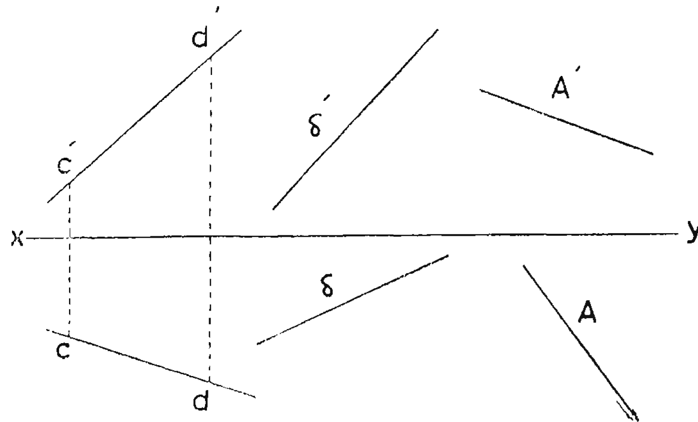
برای اینکه ازملخص خط(شکل۳ـ۲)، به‌خودخط برسیم ، باید صفحهٔ قائم‌راکه برصفحهٔ‌افقی‌تسطیح‌شده‌است، درحول xy به‌اندازهٔ °۹۰ در جهت منفی‌مثلثاتی‌دوران‌دهیم تا به صورت شکل ۳ـ۱ در آید؛ آنگاه به ترتیبی‌که در شمارهٔ۴ همین فصل‌گفتیم‌عمل کنیم تا AB نتیجه شود؛پس



۲

(ش ۳)

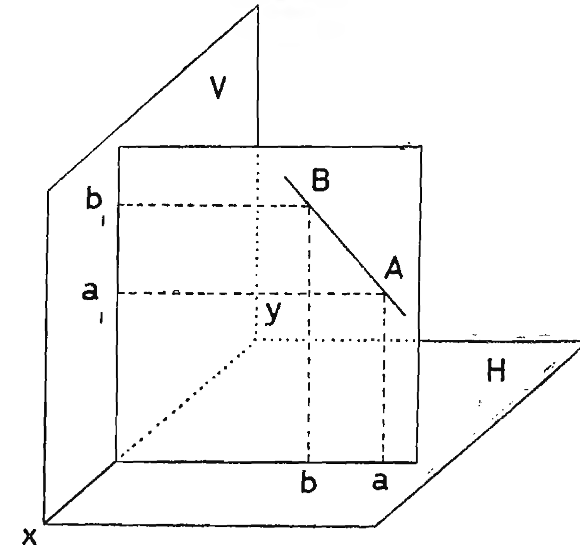
خط ، به وسیلهٔ دو تصویرش مشخص می‌شود ؛ یعنی یك تصویر افقی و یك تصویر قائم ، فقط یك خط را نمایش می‌دهند . تصویرافقی خط را با یك حرف بزرگ لاتین و تصویر قائم آن را با همان حرف وبا علامت (′) می‌نویسیم ، مانند خط AA' (شکل ۴) .



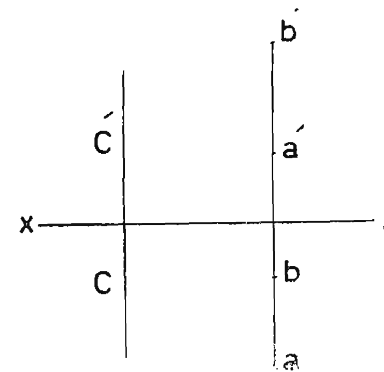
(ش ۴)

گاهی به جای حرف بزرگ ، حرف کوچك بکار می‌برند ، مانند $\delta\delta'$ و گاهی هم خط را با دو نقطه می خوانند ، مانند خط $cdc'd'$ (شکل ۴) .

۶ ـ حالت استثنایی ـ اگر صفحات مصور قائم و منتصب خطی مبدل به‌یك صفحهٔ نیمرخ شوند (شکل ۵) ، تصاویر قائم وافقی خط ، بر امتداد یکدیگر قرارمی‌گیرند و بر xy عمود می‌شوند (شکل۶ ، CC') و C و C' درحقیقت، تصاویر افقی وقائم هرخطی هستندکه درصفحهٔ نیمرخ مذکور باشد، پس باآنها یك خط مشخص نمی‌شود ؛ دراین صورت، برای مشخص ساختن یك خط ، باید دو نقطهٔ آن داده شوند ، مانند خط $aba'b'$ (شکل۶)؛ زیراکه بردونقطهٔ aa' و bb' فقط یك‌خط می‌گذرد.



(ش ۵)

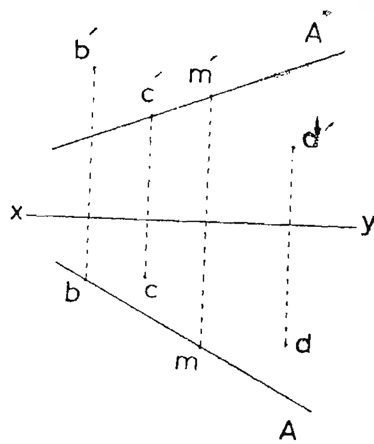


(ش ۶)

خطی‌را که تصاویرش برخط زمین عمود باشند، یعنی دریك‌صفحهٔ نیمرخ باشد ، **خط نیمرخ** می‌نامند ، پس :

> **هرخط به وسیلهٔ دوتصویرش مشخص می‌شودجز خط نیمرخ‌که باید دو نقطه‌اش در دست باشند .**

۷ ـ مسئله ـ تصویر افقی‌نقطهٔ M از خط AA' داده شده است ، تصویر قائم‌آن را بدست آورید (شکل ۷) .



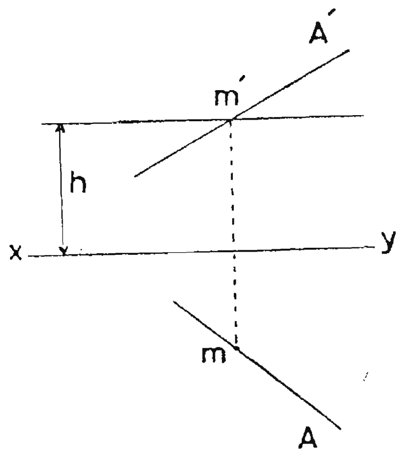
(ش ۷)

چون M روی AA' است ، تصویر قائمش از طرفی بر رویA' و ازطرف دیگر برروی رابط نقطهٔ mاست ؛ پس m' ، نقطهٔ تلاقی دو خط مذکور ، تصویر قائم M است.

تبصره ـ این‌قاعده درمورد خط نیمرخ ،که تصاویرش در یك امتداد و بر xy عمودند ، جاری نیست ودر شمارهٔ ۲۳ همین فصل‌به شرح آن خواهیم پرداخت .

تمرین ۱ ـ تصاویر خطی وتصویر قائم یك‌نقطه ازآن‌داده شده‌است؛ تصویر افقی این نقطه‌را بدست‌آورید .

۸ـ مسئله ـ برروی‌خط AA' نقطه‌ای به ارتفاع h معین کنید .



(ش ۸)

تصویر های قائم تمام نقاطی که ارتفاعشان h است، برروی‌خطی واقعندکه به‌موازات‌خط زمین وبه فاصلهٔ h ازآن‌رسم شود؛ این خط، A' را درنقطهٔ m' و رابطی که از m' می‌گذرد ، A را در نقطهٔ m قطع می‌کند (شکل ۸) و mm' نقطهٔ مطلوب است .

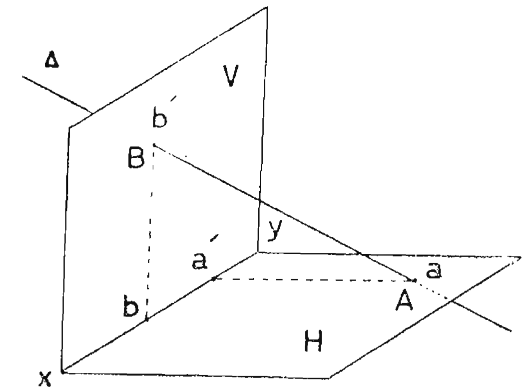
تمرین ۲ـ در شکل ۷ تحقیق کنید که سه‌نقطهٔ bb' و cc' و dd' بر روی خط AA' هستند یا نه .

تمرین ۳ـ برروی خط مفروض : الف ـ یك‌نقطه به‌بعد e معین‌کنید .
ب ـ یك‌نقطه به ارتفاع صفر بیابید (این نقطه را اثرافقی خط می‌گویند).
ج ـ یك نقطه به بعد صفر تعیین‌کنید (اثر قائم خط) .

تمرین ۴ـ تحقیق‌کنیدکه آیا می‌توان برروی‌یك خط مفروض، نقطه‌ای به‌ارتفاع h وبعد e تعیین‌کرد ؟

تمرین ۵ـ یك خط در صفحهٔ افقی تصویر و یك خط در صفحهٔ قائم تصویر رسم‌کنید .

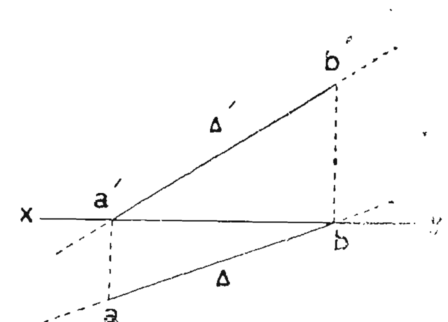
۹ـ آثار خط ـ اثر افقی ـ اثر قائم ـ فصل مشترکهای خط را با صفحات تصویر ، **آثار** آن‌می‌نامیم؛ فصل مشترك خط با صفحهٔ افقی‌تصویر، **اثر افقی** وبا صفحهٔ قائم تصویر، **اثر قائم** آن است.



(ش ۹)

درشکل۹ نقطهٔ A (یا aa') اثرافقی‌خط Δ ونقطهٔ B (یا bb') اثر قائم Δ است .

۱۰ـ ملخص ـ درشکل ۱۰ برای بدست آوردن اثر



(شکل ۱۰)

افقی خط $\Delta\Delta'$ ، تصویرقائم آن‌را امتداد داده‌ایم تاخط زمین را در a' قطع کرده است ؛ a' تصویر قائم و a تصویر افقی اثر افقی خط $\Delta\Delta'$ است. b تصویر افقی اثرقائم خط، محل برخورد تصویر افقی‌آن است باخط زمین، b' تصویر قائم آن است .

۱۱ ـ مرئی و مخفی ـ چون فرض این است که ناظر در ناحیهٔ اول می‌ایستد ، جزئی ازخط‌که درزیرصفحهٔ افقی‌است و جزئی از آن‌که در عقب صفحهٔ قائم است، ازنظر او پنهان هستند ودیده نمی‌شوند؛ یعنی فقط جزئی از خط‌که در ناحیهٔ اول است، برای ناظر مرئی وبقیه مخفی است وقاعدتاً باید آن را نقطه‌چین رسم‌کرد ؛ ولی در ملخص عموماً این قاعده مراعات نمی‌شود .

۱۲ـ خطوط مهم ـ درمیان خطوط بیشمار ، شش نوع خط که موازی باصفحات تصویر وخط زمین یاعمود برآنها هستند ، اوضاعی‌خاص دارند و خطوط مهم نامیده می‌شوند؛ آنهاعبارتنداز‌خطوط **افقی، جبهی، مواجه ، قائم ، منتصب و نیمرخ .**

۱۳ـ خط افقی یا افقیه ـ خط افقی یا افقیه ، خطی است که موازی با صفحهٔ افقی باشد ؛ مانند خط H[1] درشکل ۱۱ .

چون‌تمام نقاط این خط یك ارتفاع دارند، تصاویر قائمشان به‌یك فاصله‌اند ازخط زمین ، پس :

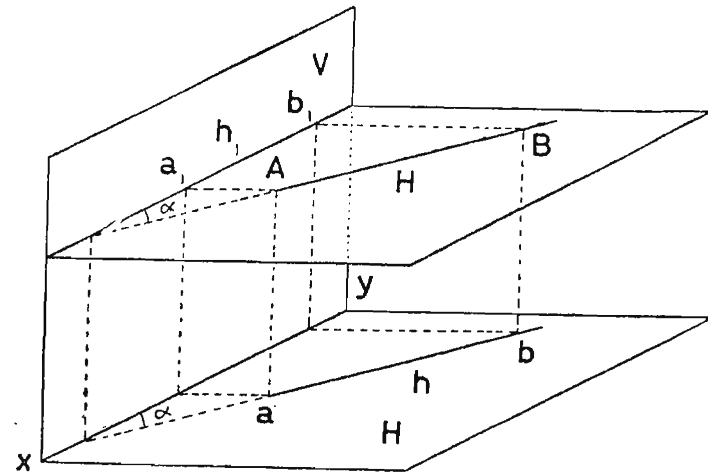
تصویرقائم افقیه موازی‌است باخط زمین وتصویر افقی افقیه با خودآن موازی است .

(زیرا شکل $AabB$ مستطیل است .)

زاویه‌ای‌که خط افقی باصفحهٔ قائم تصویر می‌سازد مساوی است با زاویهٔ تصویر افقی‌آن باخط زمین .

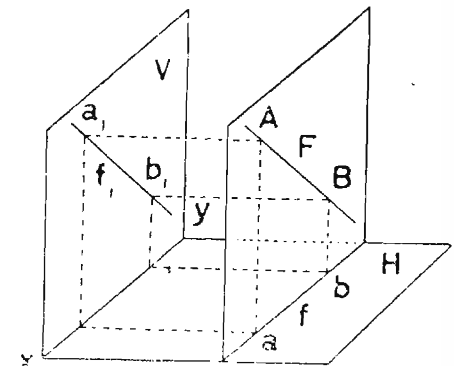
۱ـ H حرف اول Horizontale یعنی افقیه است .

(زیراکه اضلاع این دو زاویه نظیر بنظیر متوازیند.)



(ش ۱۱)

۱۴ـ خط جبهی یا جبهیه ـ خط جبهی یا جبهیه خطی است که موازی با صفحهٔ قائم تصویر باشد؛ مانند خط F [1] در شکل ۱۲.



(ش ۱۲)

به دلایلی مشابه باآنچه دربارهٔ خط افقی گفتیم، معلوم می‌شود:

۱ـ تصویر افقی خط جبهی موازی است با xy.

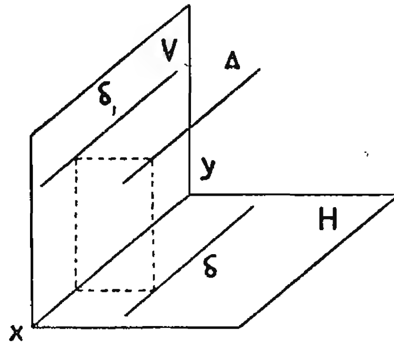
۱ـ F حرف اول Frontale (جبهیه) است.

(زیرا که همهٔ نقاط آن، یك بعد دارند.)

۲ـ تصویر قائم خط جبهی موازی است باخود آن.
۳ـ زاویهٔ خط جبهی با صفحهٔ افقی مساوی است با زاویهٔ تصویر قائمش با خط زمین.

۱۵ ـ خط مواجه ـ خط مواجه خطی است موازی با خط زمین (خط Δ، شکل ۱۳).

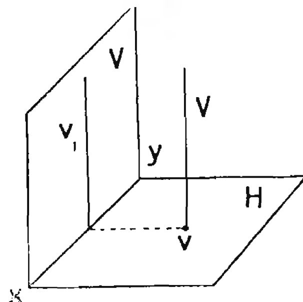
این خط که موازی با فصل مشترك صفحات تصویر است، با هردو صفحهٔ تصویر موازی می‌شود؛ پس هم جبهیه است و هم افقیه، بنا بر این:



(ش ۱۳)

هردو تصویر خط مواجه با خط زمین موازیند.

۱۶ـ خط قائم ـ خط قائم آن است که بر صفحهٔ افقی عمود باشد؛ مانند خط V [1] درشکل ۱۴.



(ش ۱۴)

۱ـ V حرف اول Verticale (قائم) است.

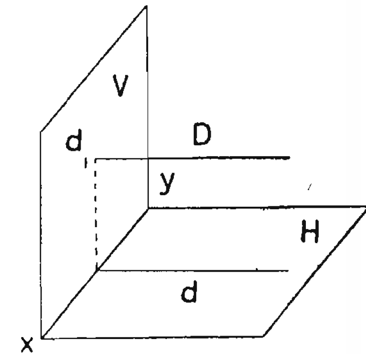
تصویر افقی خط قائم یك نقطه است (به چه دلیل ؟)
تصویر قائم خط قائم عمود است برخط زمین .

زیرا که صفحهٔ مصور منتصب خط مذکور، صفحه ای است نیمرخ (چرا ؟) .

۱۷ـ خط منتصب ـ خط منتصب آن است که برصفحهٔ قائم تصویر عمود باشد ؛ مانند خط D [1] درشکل ۱۵ .

تصویر قائم خط منتصب یك نقطه است .
تصویر افقی خط منتصب عمود است بر xy .

۱۸ ـ خط نیمرخ ـ چنانکه سابقاً هم دیده‌ایم ، خط نیمرخ واقع است در یك صفحهٔ نیمرخ و عمود است بر خط زمین (رجوع کنید به شکلهای ۵ و ۶ فصل دوم) ؛ پس هر دو تصویر آن دریك امتداد و عمودند بر xy .

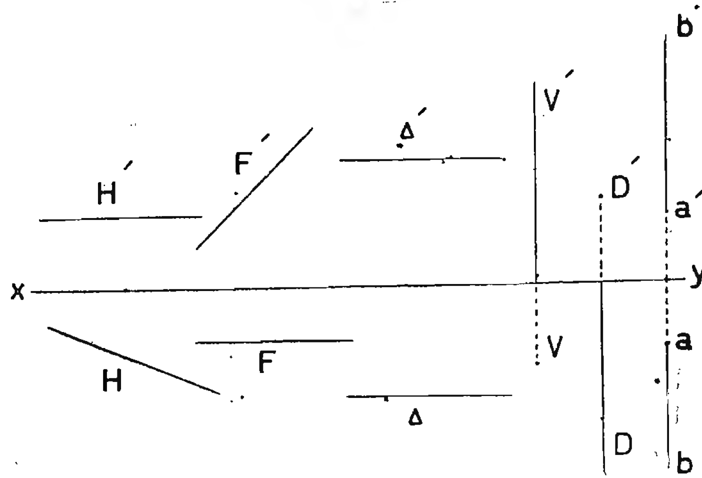


(ش ۱۵)

برای مشخص شدن خط نیمرخ ، بطوری‌که قبلاً گفته‌ایم ، باید دو نقطه‌اش در دست باشد .

در شکل ۱۶ ، خط HH' افقیه و FF' جبهیه و ΔΔ' مواجه و VV' قائم و DD' منتصب و aba'b' نیمرخ است .

۱ـ D حرف اول Debout (منتصب) است .

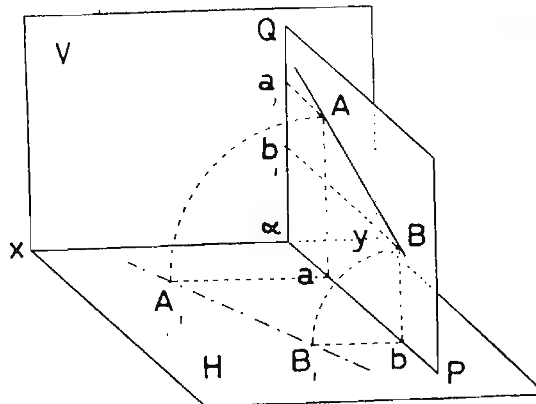


(ش ۱۶)

تمرین ـ نقطهٔ (۵ و ۲ و ۳) A را تعیین‌کرده برآن اولا یك‌خط افقی بگذرانید‌که باصفحهٔ تصویر (کدام صفحهٔ تصویر ؟) زاویهٔ ۴۵° بسازد؛ مسئله چند جواب دارد ؟ اگر جوابها متعدد باشند ، آن خطی را رسم‌کنید‌که اثرش (کدام اثر؟) طرف راست رابط aa' باشد . ثانیاً یك جبهیه بگذرانید که باصفحهٔ تصویر زاویهٔ ۶۰° بسازد .

تمرین ـ درهر یك‌ازصفحات نیمساز فرجه خطی رسم‌کنید وآثارش‌را بدست آورید .

۱۹ـ تسطیح صفحهٔ نیمرخ برصفحات تصویر ـ صفحهٔ نیمرخ عمود است بر xy و صفحات تصویر را در امتداد دوخط αP وαQ (شکل۱۷)، که بر xy عمودند وآنهارا بترتیب اثر افقی و اثر قائم صفحهٔ نیمرخ می‌نامیم، قطع می‌کند. اگر این

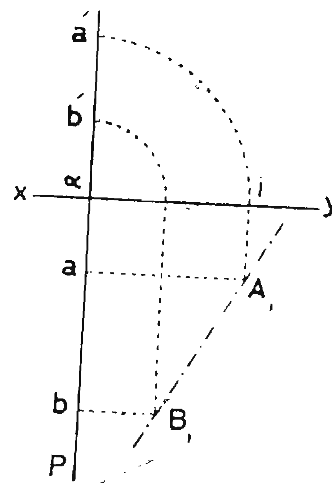


(ش ۱۷)

صفحه را درحول αP به‌اندازهٔ °۹۰ دوران دهیم تا برصفحهٔ افقی‌منطبق شود ،گوییم صفحهٔ نیمرخ را برصفحهٔ افقی تسطیح کرده‌ایم .

در تسطیح صفحهٔ نیمرخ برصفحهٔ افقی، هرنقطه مانند A ازصفحهٔ نیمرخ برروی دایره‌ای به‌مرکز a و به شعاع aA تغییرمکان می‌دهد تا در A_1 برصفحهٔ افقی واقع شود ؛ چون صفحهٔ دایره برαP عمود است، aA_1 بر αP عمود است و با aA مساوی است؛ پس تسطیح یك‌نقطه از صفحهٔ‌نیمرخ برصفحهٔ‌افقی، به‌این ترتیب بدست می‌آید‌که درصفحهٔ‌افقی، از تصویر افقی نقطه عمودی براثرافقی‌صفحهٔ نیمرخ اخراج‌کرده وطولی به اندازهٔ ارتفاع‌آن نقطه برآن جدا کنیم .

در ملخص ، همین عمل را انجام می‌دهیم : از a (شکل ۱۸) ، یعنی تصویر افقی نقطه ، عمودی بر αP (α محل تقاطع صفحهٔ نیمرخ و xy است) اخراج‌کرده و ازمبداء a به‌اندازهٔ ارتفاع نقطهٔ aa' برآن جدا می‌کنیم تا A_1 تسطیح نقطهٔ aa' بدست آید .



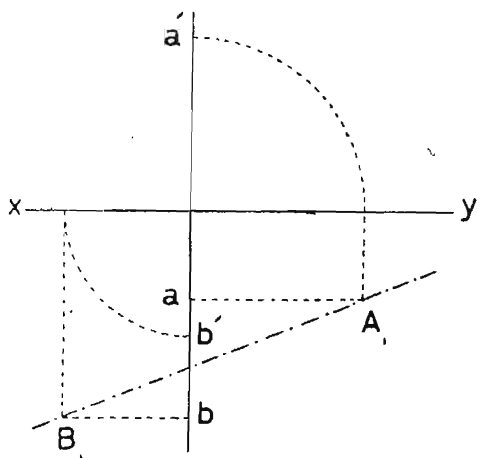
(ش ۱۸)

برای جدا کردن طولی مساوی ارتفاع aa' ، به‌مرکز α و شعاع $\alpha a'$ قوسی می زنیم تا خط زمین‌در را i قطع‌کند وطول αi را (که همان ارتفاع نقطه باشد) ، به وسیلهٔ رسم خطی عمود بر xy ، بر خطی که از a بر αP عمود شده است نقل می‌کنیم .

برای تسطیح یك‌خط نیمرخ ، کافی است دو نقطهٔ آن را تسطیح

کنیم . در شکل ۱۸ ، A_1B_1 تسطیح خط نیمرخ AB است بر صفحهٔ افقی، همچنین درشکل ۱۹ .

در تسطیح خط ، تسطیح تمام نقاطی که ارتفاعشان مثبت است ، در یك طرف تصویر خط ، مثلا طرف راست‌آن ، و تسطیح نقاطی که ارتفاعشان منفی است، درطرف دیگرآن واقع می‌شوند (شکل ۱۹) و بعکس .



(ش ۱۹)

فایدهٔ تسطیح این‌است‌که خط فضایی AB را به صورت A_1B_1 روی صفحهٔ افقی در دسترس قرار می دهد .

طول A_1B_1 مساوی AB و زاویهٔ A_1B_1 با ab مساوی زاویهٔ‌خط نیمرخ با صفحهٔ افقی و زاویهٔ A_1B_1 با خط زمین مساوی زاویهٔ خط نیمرخ با صفحهٔ قائم تصویر است .

تسطیح هرنقطه که بر AB یا امتدادآن باشد، بر A_1B_1 یاامتداد آن واقع می‌شود .

ارتفاع هر نقطه مساوی است بافاصلهٔ تسطیحش از تصویر افقی و بعد آن مساوی است با فاصلهٔ تسطیحش از خط زمین

۲۰ ـ صفحهٔ نیمرخ‌را می‌توان به همین ترتیب برصفحهٔ قائم تسطیح

کرد، فقط با این تفاوت که برعمود‌هایی که از تصاویر قائم نقاط بر تصویر خط نیمرخ اخراج می‌شوند، به اندازهٔ بعد های آنها جدا کنیم (شکل ۲۰).

(ش ۲۰)

۲۱ـ ترفیع ـ ترفیع عکس عمل تسطیح است، یعنی اگر صفحهٔ نیمرخی را که بر صفحهٔ افقی یا قائم تسطیح شده است، در حول اثرش به اندازهٔ ۹۰ درجه درجهت عکس دوران دهیم، می‌گوییم که آن را ترفیع کرده ایم. اگر A_1B_1 تسطیح $aba'b'$ باشد، $aba'b'$ ترفیع A_1B_1 است؛ همچنین aa' ترفیع A_1 است. ترفیع هر نقطهٔ M_1 واقع بر A_1B_1 روی $aba'b'$ است و به این طریق بدست می‌آید که از M_1، تسطیح نقطهٔ فضایی M، عمودی بر تصویر خط رسم کنیم تا یك تصویر نقطهٔ M بدست آید (شکل ۲۱)؛ آنگاه با استفاده از ارتفاع (یا بعد) تصویر دیگر M را بدست می‌آوریم.

۲۲ـ قرار داد ـ تسطیح خط را، که خطی است فرعی ولی بسیار مهم، باخط و نقطه رسم می‌کنیم.

۲۳ـ به کمك تسطیح می‌توان مسائل مربوط به خط نیمرخ را حل کرد.

مثال ۱ ـ m تصویر افقی نقطه‌ای از نیمرخ $aba'b'$ داده شده است (شکل۲۱)؛ مطلوب است m' تصویر قائم آن.

اگر ارتفاع M معلوم شود، محل آن برروی نیمرخ مشخص خواهد شد. برای پیدا کردن ارتفاع M، نیمرخ مفروض را در A_1B_1 تسطیح می‌کنیم؛ M_1، تسطیح نقطهٔ مطلوب، واقع است هم بر A_1B_1 و هم برعمودی که از m بر ab اخراج شود؛ ارتفاع M مساوی است با mM_1؛ آن را بر xy نقل می‌کنیم و به وسیلهٔ رسم قوس ربع دایره بر $a'b'$ انتقال می‌دهیم تا m' تصویر قائم M بدست آید.

(ش ۲۱)

مثال ۲ـ آثار خط نیمرخ $aba'b'$ (شکل ۲۱) را تعیین کنید.

باز A_1B_1 تسطیح خط را بدست می‌آوریم؛ **اثر افقی**، نقطه ای است به ارتفاع صفر؛ پس تسطیح آن بر تصویر افقیش منطبق است، یعنی H_1، محل تلاقی تسطیح و تصویر افقی خط، هم تسطیح اثر افقی است و هم تصویر افقی آن، و تصویر قائمش برروی خط زمین است. **اثر قائم**، نقطه‌ای است به بعد صفر، پس فاصلهٔ تسطیحش از خط زمین صفر است؛ بنا بر این v_1، محل تلاقی تسطیح خط با xy، تسطیح اثر قائم است؛

تصویر افقیش v برروی xy است ، وتصویر قائمش v' را به وسیلهٔ قوسی از دایره بدست می‌آوریم .

تمرین ـ الف ـ A_1B_1 تسطیح نیمرخی وامتداد تصاویر نیمرخ مذکور داده شده‌اند ؛ آن را ترفیع کنید . ب ـ تصویر قائم یك نقطه از نیمرخی داده شده‌است ؛ تصویر افقی آن را بدست آورید. ج ـ به‌وسیلهٔ تسطیح نیمرخ برصفحهٔ قائم، آثار آن را بدست آورید. د ـ برنیمرخ مفروض، نقطه‌ای به‌ارتفاع h و نقطهٔ‌دیگری به‌بعد e بدست آورید. هـ ـ برنقطهٔ مفروض mm' نیمرخی بگذرانید که باصفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد. و ـ برنقطهٔ‌مفروض، نیمرخی مروردهید که باصفحهٔ قائم زاویهٔ °۴۵ تشکیل دهد. ز ـ برنقطهٔ‌مفروض، نیمرخی بگذرانید که ارتفاع اثرقائمش دوبرابر بعد اثر افقیش باشد .

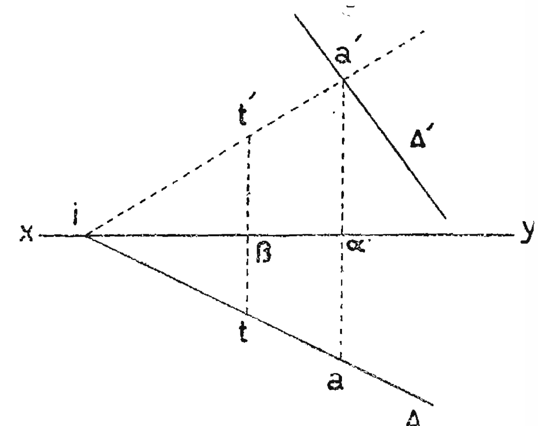
۳۴ ـ مسئله ـ بر خط مفروض $\Delta\Delta'$ نقطه‌ای تعیین کنید که ارتفاعش k برابر بعدش باشد .

فرض می‌کنیم که مسئله حل شده و aa' نقطهٔ مطلوب باشد (شکل ۲۲) ، یعنی $\alpha a' = k . \alpha a$. اگر یکی از تصاویر خط ، مثلا Δ ، xy را در i قطع کند واز i به a' وصل کنیم وخطی بدلخواه عمود بر xy بکشیم تا ia و xy و ia' را بترتیب مثلا در t و β و t' قطع کند، درنتیجهٔ تشابه دومثلث aia' و tit' چنین خواهیم داشت :

$$\frac{\beta t'}{\beta t} = \frac{\alpha a'}{\alpha a} = k$$

یا $\beta t' = k . \beta t$

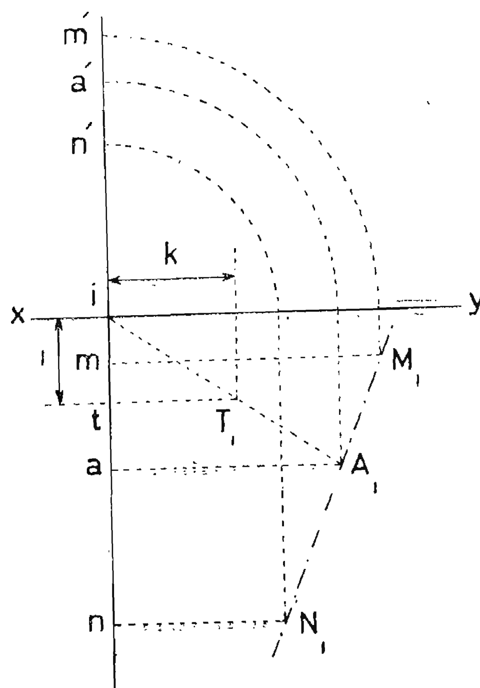
پس راه حل مسئله به این طریق بدست می آید : Δ ،



(ش ۲۲)

تصویر افقی خط ، را امتداد می‌دهیم تا درنقطهٔ i خط زمین را قطع کند و از یك نقطهٔ اختیاری t واقع بر Δ عمود $t\beta$ را بر xy فرود آورده بر امتداد آن ، t' را با شرط $\beta t' = k . \beta t$ معین می‌کنیم و از i به t' وصل کرده امتداد می دهیم تا Δ' را در a' قطع کند ؛ aa' نقطهٔ مطلوب است .

برای حل مسئله در مورد خط نیمرخ ، اول نیمرخ را تسطیح می کنیم (شکل ۲۳) ، سپس T_1 را به فاصلهٔ ۱ از xy و فاصلهٔ k از تصویر افقی نیمرخ بدست می‌آوریم؛ خط iT_1 تسطیح نیمرخ را در A_1 ، که تسطیح نقطهٔ مطلوب است ، قطع می‌کند؛ A_1 را در aa' ترفیع می‌کنیم ، aa' نقطهٔ مطلوب است ؛ زیرا :



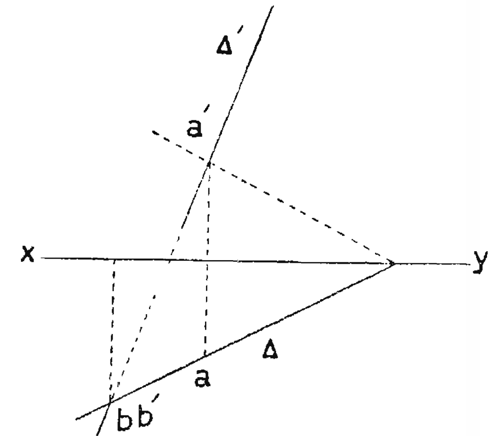
(ش ۲۳)

$$\frac{ia'}{ia} = \frac{aA_1}{ia} = \frac{tT_1}{it} = \frac{k}{1} = k$$

تمرین ـ الف ـ برخطی‌که بردونقطهٔ A (۲و۳و۵) و B (۳و۲و۱) می‌گذرد، دونقطهٔ M و N چنان تعیین‌کنید که نسبت بعد M به ارتفاعش $\frac{1}{2}$ ونسبت ارتفاع N به بعدش $\frac{2}{5}$ باشد . ب ـ نقاط M و N با شرایط مذکور

را برخطی‌که بردو نقطهٔ (۳ و ۵ و ۰) C و (۴ و ۱ و ۰) D می‌گذرد، بدست آورید .

۳۵ ـ نقاط تلاقی خط با صفحات نیمساز فرجه ها ـ نقاط تلاقی خط و صفحات نیمساز فرجه‌ها از نقاط مهم خط هستند . برای بدست‌آوردن **نقطهٔ تلاقی خط با نیمساز فرجهٔ اول** ، باید نقطه‌ای بر خط تعیین کرد که دو تصویرش نسبت به xy قرینهٔ یکدیگر باشند؛ برای این کار، قرینهٔ یکی‌ازدو تصویر خط‌را نسبت‌به xy می‌سازیم تا تصویردیگررا قطع کند (شکل ۲۴ نقطهٔ aa') .

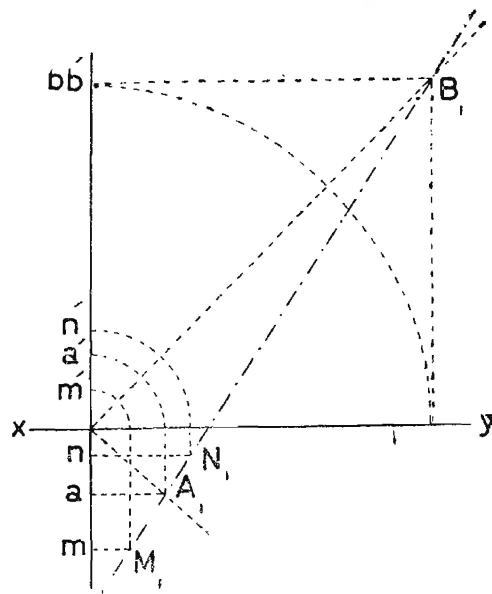


(ش ۲۴)

فصل مشترك خط بانیمساز فرجهٔ دوم نقطه‌ای است ازخط‌که تصاویرش برهم منطبقند ؛ پس برای تعیین ملخص آن، باید تصاویر خط را امتداد دهیم تا یکدیگر را قطع‌کنند (شکل ۲۴ نقطهٔ bb') .

در مورد خط نیمرخ، آن را تسطیح می‌کنیم و نقاط تلاقی‌تسطیح را با نیمسازهای دو زاویه‌ای‌که بین xy و تصاویر خط تشکیل می‌شوند بدست می‌آوریم تا A_1 و B_1 ، تسطیح نقاط تلاقی نیمرخ با نیمساز فرجهٔ‌اول و نیمساز فرجهٔ‌دوم، بدست آیند؛ سپس A_1 را در aa' و B_1 را

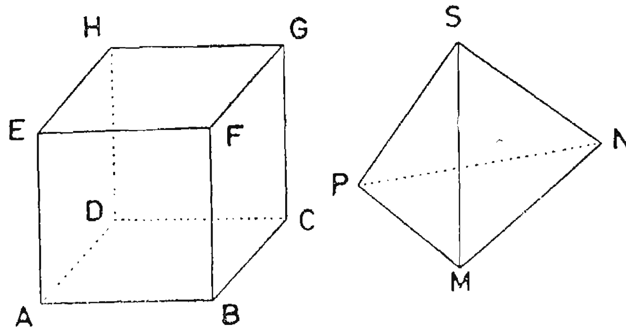
در bb' ترفیع می‌کنیم (شکل ۲۵) .



(ش ۲۵)

۳۶ ـ اوضاع مختلف دوخط نسبت به یکدیگر ـ می‌دانیم که دوخط، ممکن‌است در یك صفحه باشندکه دراین‌حال یامتوازیند یامتقاطع؛ وممکن‌است در یك صفحه نباشند که دراین‌حال دوخط، متنافر نام دارند .

تمرین ـ الف ـ در شکل ۲۶ خطوط متوازی و متقاطع و متنافر را معین‌کنید .



(ش ۲۶)

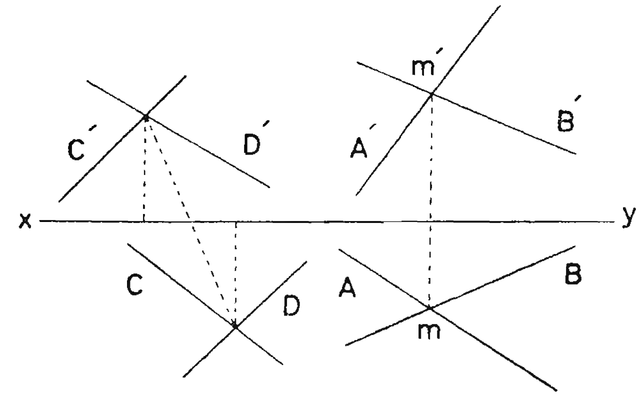
ب ـ در اطراف خود مثالهایی برای سه نوع خط پیدا کنید .

شرط تقاطع دوخط

۳۷ ـ قضیه ـ در هندسهٔ ترسیمی شرط لازم و کافی برای

آنکه دوخط متقاطع باشند، این است که تصاویر همنامشان یکدیگر را قطع کنند ودو نقطهٔ تقاطع ، روی یك رابط باشند .

شرط لازم است ، زیرا که اگر دو خط AA' و BB' یکدیگر را درنقطه‌ای مانند M قطع کنند و m و m' تصاویر M باشند ، A و B تصاویر افقی دو خط ، بر m می‌گذرند یعنی متقاطعند ؛ همچنین A' و B' یکدیگر را در m' قطع می‌کنند ؛ وبدیهی است که m و m' بر یك رابطند (شکل ۲۷) .



(ش ۲۷)

شرط کافی است ، زیرا که اگر نقاط تقاطع تصاویر همنام دوخط فضایی بر روی یك رابط باشند ، این نقاط تقاطع ، نقطه ای را در فضا مشخص می‌سازند که درعین حال بر روی هر دو خط است ؛ پس دو خط فضایی متقاطعند .

در شکل ۲۷ ، دوخط AA' و BB' متقاطعند و دوخط CC' و DD' متقاطع نیستند .

برای تحقیق در تقاطع دوخط نیمرخ ، به شمارهٔ ۳۰ رجوع کنید .

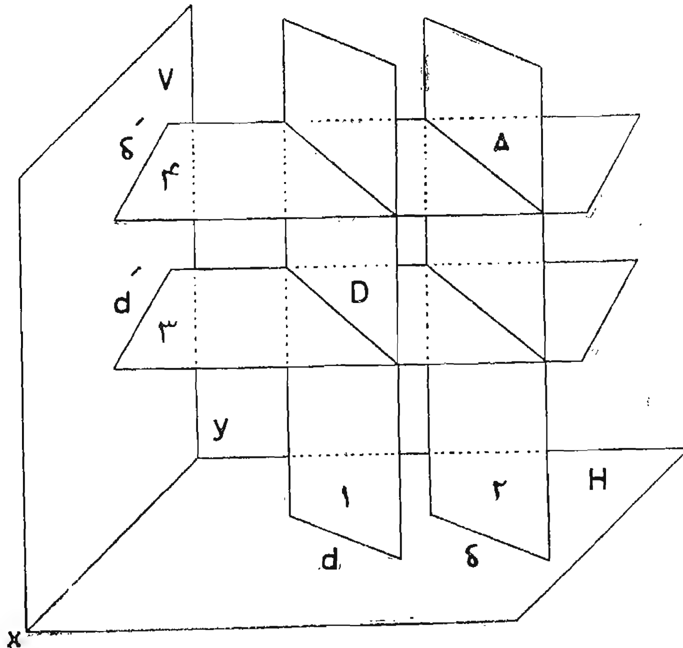
تمرین ۱ ــ بر نقطهٔ مفروض aa' خطی چنان مرور دهید که خط مفروض را در نقطه‌ای به ارتفاع h (یا به بعد e) قطع کند .

تمرین ۲ ــ تحقیق کنید شرط آنکه خطی یك خط قائم یا یك خط منتصب را قطع کند چیست ؛ آنگاه ازنقطهٔ مفروض aa' خطی چنان بگذرانید که قائم VV' و منتصب DD' را قطع کند .

شرط توازی دوخط

۳۸ ــ قضیه ــ در هندسهٔ ترسیمی شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط (غیر نیمرخ) متوازی باشند ، این است که تصاویر همنامشان با یکدیگر موازی باشند .

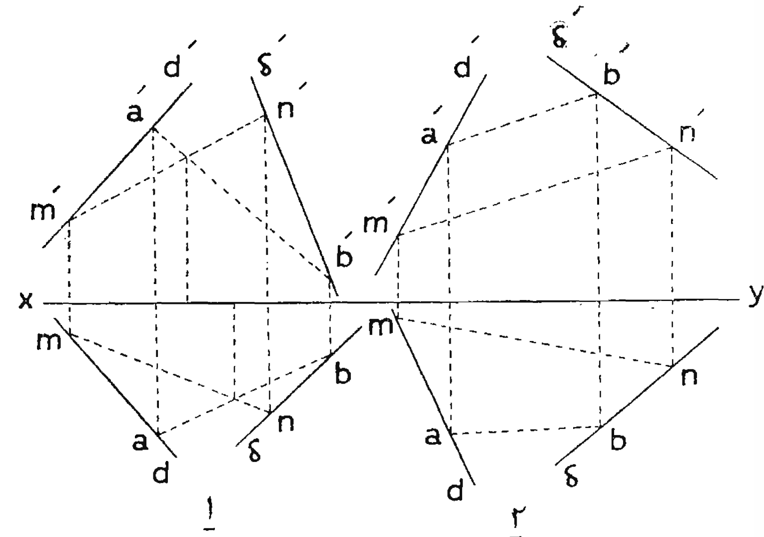
شرط لازم است ، زیرا که اگر دو خط D و Δ متوازی باشند (شکل ۲۸) ، صفحات مصور آنها متوازیند (چرا ؟) ؛ پس فصل‌مشترکهای



(ش ۲۸)

آنها باصفحهٔ افقی ، یعنی تصاویرافقی دوخط ، متوازیند . همچنین است تصاویر قائم دوخط .

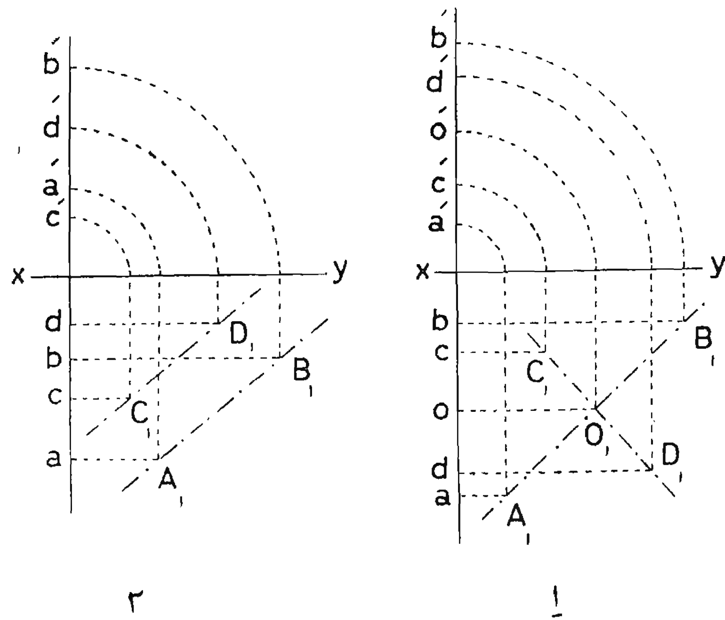
و $mnm'n'$ نه‌متقاطع شدند و نه‌متوازی (شکل ۳۱ـ۱و۲)، dd' و $\delta\delta'$ دریك صفحه نیستند ومتنافرند .



(ش ۳۱)

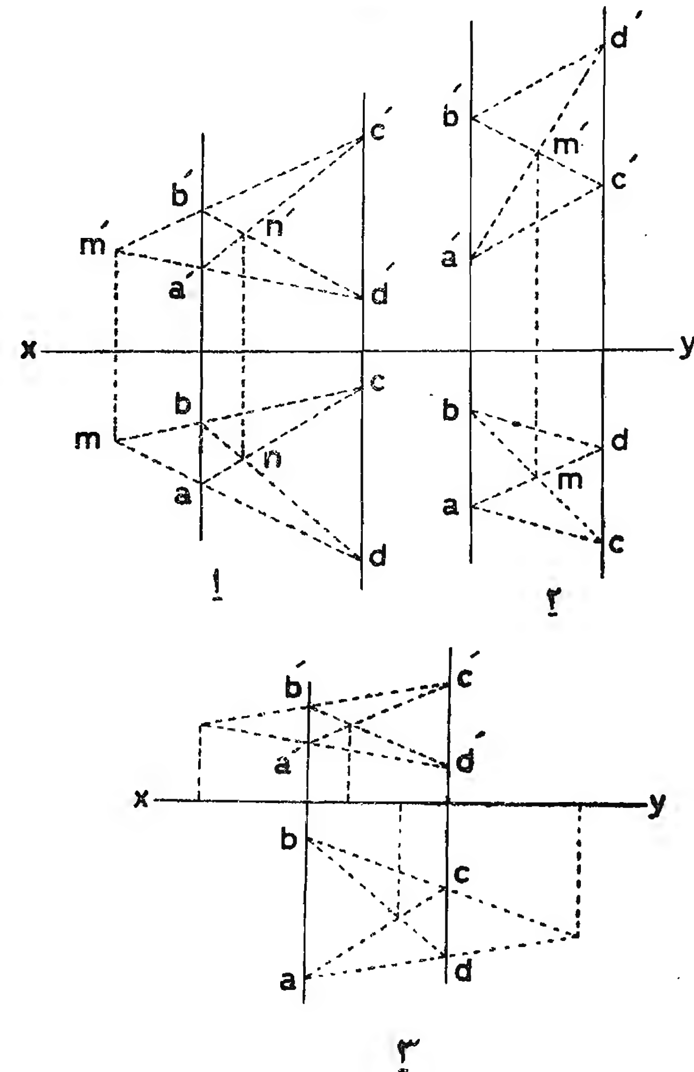
تحقیق در اوضاع دو خط نیمرخـ دو خط نیمرخ $aba'b'$ و $cdc'd'$ ، یا تصاویرشان بر هم منطبقند (شکل ۳۲) یا از یکدیگر متمایزند (شکل ۳۳) .

در **حالت اول** ، یعنی وقتی‌که تصاویر دوخط مختلط باشند ، دو خط دریك‌صفحهٔ نیمرخ واقعند؛ پس‌یامتقاطعند یا متوازی. برای‌تحقیق، صفحهٔ آنها را تسطیح می‌کنیم ؛ اگر تسطیحهای دو خط متقاطع باشند ، (شکل ۳۲ـ۱) دوخط متقاطعند و O_1 تسطیح نقطهٔ تقاطع آنهاست؛ آن را در oo' ترفیع می‌کنیم . اما اگر تسطیحهای دو خط متوازی شوند (شکل ۳۲ـ۲) ، دوخط مفروض باهم موازیند .



(ش ۳۲)

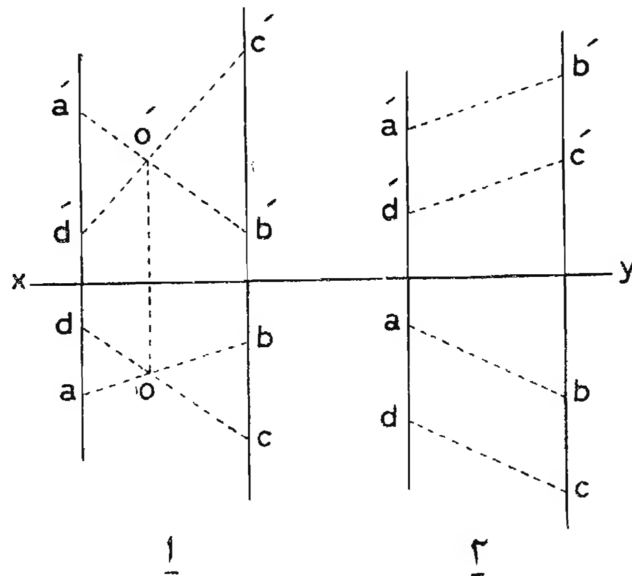
در **حالت دوم** ، یعنی وقتی‌که تصاویر متمایز باشند ، دو خط یا متنافرند یا متوازی. برای تحقیق، ممکن است آنها را تسطیح‌کرد؛ اگر تسطیحها متوازی شدند دو خط متوازیند و گرنه متنافرند ؛ ولی اغلب برای تحقیق وضع آنها، از روشی‌که اندکی جلوتر گفتیم، استفاده می‌کنیم؛ یعنی دو نقطهٔ aa' و bb' از یکی را به‌دو نقطهٔ cc' و dd' از دیگری وصل می‌کنیم ، اگر دو خط کمکی $aca'c'$ و $bdb'd'$ (یا $ada'd'$ و $bcb'c'$) متقاطع شوند (شکل۳۳ـ۱)، دونیمرخ دریك صفحهٔ غیر نیمرخ واقعند ، پس متوازیند ؛ همچنین اگر دو خط از خطوط کمکی متوازی شوند ، دو نیمرخ مفروض متوازیند (شکل ۳۳ـ۲) ؛ اما اگر دو خط کمکی متنافر باشند (شکل۳۳ـ۳) ، دونیمرخ هم متنافرند .



(ش ۳۳)

۳۱ـ مسئله ـ از نقطهٔ aa′ خطی به موازات نیمرخ bcb′c′ رسم کنید .

حل اول ـ aba′b′ را رسم کرده روی آن نقطه ای مانند oo′ اختیار می‌کنیم ؛ آنگاه coc′o′ را می‌کشیم وآن را امتداد می‌دهیم تا رابط aa′ یا امتداد آن را در dd′ قطع کند (شکل ۳۴ـ۱)؛ خط ada′d′ نیمرخ مطلوب است (چرا ؟) .



(ش ۳۴)

حل دوم ـ aba′b′ را رسم کرده از cc′ خطی موازی با آن می‌کشیم تا رابط aa′ یا امتداد آن را در dd′ قطع کند (شکل ۳۴ـ۲) ؛ ada′d′ نیمرخ مطلوب است .

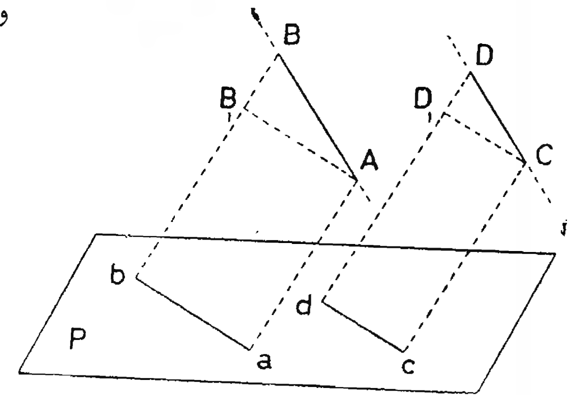
۳۲ـ قضیه ـ تصاویر قطعات واقع بر خطوط متوازی، بر نسبت همان قطعاتند .

فرض می‌کنیم که P یکی از صفحات تصویر (شکل ۳۵) و AB

و CD دو قطعهٔ واقع بر دو خط متوازی و ab و cd تصویر های آنها باشند؛ باید ثابت کنیم‌که:

$$\frac{cd}{ab}=\frac{CD}{AB}$$

از A و C دو خط،



(ش ۳۵)

موازی با ab و cd می‌کشیم تا خطوط مصور نقاط B و D را بترتیب در B_1 و D_1 قطع کنند؛ بدیهی است که $AB_1=ab$ و $CD_1=cd$ و داریم:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{CD_1}{AB_1}=\frac{cd}{ab}$$

تمرین – پنج نقطهٔ (۱ و ۲ و ۳–) A و (۳ و ۴ و ۱۴–) B و (۳ و $\frac{۱۵}{۴}$ و ۱) C و (۲ و $\frac{۵}{۲}$ و ۲) D و (۳ و ۱ و ۵) E مفروضند؛ تصاویر دوخط AB و CD درخارج حدود شکل متقاطعند؛ اولاً وضع آنها را نسبت به یکدیگر تحقیق‌کنید (اگر نقاط را دقیق انتخاب‌کنید، دو خط متقاطع می‌شوند). ثانیاً درصورتی‌که دو خط متقاطع باشند، بر E خطی مرور بدهیدکه برنقطهٔ تقاطع آنها بگذرد.

۳۳ – مسئله – خطی‌رسم‌کنیدکه با نیمساز یکی‌ازفرجه های اول یا دوم موازی باشد.

شرط موازی بودن خطی با یك صفحه این است‌که آن خط با یکی از خطوط صفحه موازی باشد. چون دو تصویر هرخط واقع در نیمساز

فرجهٔ اول نسبت به xy قرینهٔ یکدیگرند:

تصاویر هر خط که با نیمساز فرجهٔ اول موازی باشد، با xy زوایای متساوی می‌سازند ولی با هم موازی نیستند.

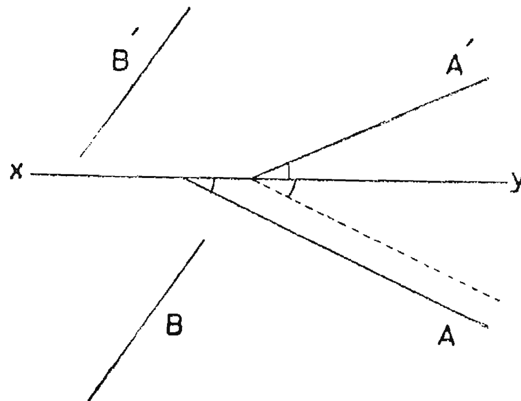
(شکل ۳۶، AA')

به عبارت دیگر، **اگر خطی با نیمساز فرجهٔ اول موازی باشد، هر تصویر آن موازی‌است باقرینهٔ تصویردیگرش نسبت به‌خط زمین.**

وچون دوتصویر هرخط واقع در نیمساز فرجهٔ دوم بریکدیگر منطبقند:

تصاویر هرخط که با نیمساز فرجهٔ دوم موازی‌باشد، با هم موازیند.

(شکل ۳۶، BB')



(ش ۳۶)

تمرین – بر نقطهٔ aa' خطی مرور دهید که با نیمساز فرجهٔ اول موازی باشد و تصویرقائمش با xy زاویهٔ ۳۰° بسازد. بر نقطهٔ bb' خطی موازی با نیمساز فرجهٔ دوم بگذرانید که تصویر قائمش بر نقطهٔ معینی بگذرد.

خلاصهٔ مطالب مهم

۱ـ تصویر خط مستقیم ، خطی است مستقیم .

۲ـ هرخط، به وسیلهٔ دو تصویرش مشخص می‌شود مگر خط نیمرخ‌که باید دو نقطه‌اش در دست باشد .

۳ـ نقاط مهم‌خط عبارتند از : الف ـ اثر افقی‌که تصویرقائمش، نقطهٔ تلاقی تصویرقائم خط است با خط زمین. ب ـ اثرقائم‌که تصویر افقیش، نقطهٔ تلاقی تصویر افقی خط است با خط زمین . ج ـ نقطهٔ تقاطع خط با صفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول ،که برای تعیین آن باید قرینهٔ یکی از دو تصویر خط را نسبت به خط زمین معین ساخت تاتصویر دیگر را قطع‌کند؛ نقطهٔ برخورد ، یك تصویر نقطهٔ تقاطع خط با نیمساز فرجهٔ اول‌است. د ـ نقطهٔ تقاطع خط با نیمساز فرجهٔ دوم ،که از تقاطع دوتصویر خط بدست می‌آید .

۴ ـ خطوط مهم عبارتند از : افقی ، که موازی‌باصفحهٔ افقی است ، و تصویر قائمش موازی است با xy . جبهی،که موازی‌باصفحهٔ قائم‌است وتصویر افقیش موازی‌است با xy . قائم،که عموداست برصفحهٔ افقی و تصویر افقیش یك نقطه‌است وتصویر قائمش‌عموداست برxy . منتصب،که عمود است برصفحهٔ قائم وتصویر قائمش یك نقطه‌است وتصویر افقیش عموداست برxy . مواجه ، که موازی باخط زمین است وهردوتصویرش هم باآن موازیند. نیمرخ،که عمود است برخط زمین و هردو تصویرش برامتداد یکدیگر و برxy عمود هستند و برای تعیین آن ، باید دونقطه‌اش در دست باشد .

۵ ـ مسائل مربوط به خط‌نیمرخ، به وسیلهٔ تسطیح آن برصفحهٔ تصویر باید حل‌شوند . برای تسطیح خط‌نیمرخ برصفحهٔ افقی (قائم)، ازتصویر افقی (قائم) هرنقطه عمودی برتصویرافقی (قائم) خط اخراج کرده و برآن، طولی مساوی ارتفاع (بعد) نقطه جدا می‌کنیم تا تسطیح نقطه بدست‌آید .

نقطهٔ تلاقی تسطیح نیمرخ با تصویر افقی آن، اثر افقی نیمرخ است . نقطهٔ تلاقی تسطیح نیمرخ باخط‌زمین، تسطیح اثر قائم آن است . نقاط تلاقی تسطیح نیمرخ با نیمسازهای زوایای بین xy و تصاویر نیمرخ ، تسطیح نقاط برخوردآن با نیمساز فرجه های اول و دوم هستند .

۶ ـ شرط تقاطع دوخط این‌است‌که تصویرهای همنامشان متقاطع و دو نقطهٔ تقاطع، روی یك رابط باشند .

۷ـ شرط توازی دو خط این است که تصویر های همنامشان متوازی باشند .

۸ـ شرط‌توازی دوخط نیمرخ این‌است‌که فواصل‌بین تصاویرقائم دونقطهٔ آنها متناسب باشند بافواصل بین تصاویر افقی همان نقاط .

۹ـ تصاویرهمنام‌قطعات‌واقع برخطوط متوازی، برنسبت همان‌قطعاتند.

۱۰ ـ هرگاه خطی با نیمساز فرجهٔ اول موازی باشد ، هر تصویرش موازی‌است باقرینهٔ تصویر دیگرش نسبت به خط زمین .

۱۱ـ هرگاه خطی با نیمساز فرجهٔ دوم موازی باشد ، دو تصویرش متوازیند .

۱۲ـ اگرنیمرخی موازی بانیمساز فرجهٔ اول باشد ، فاصلهٔ تصویرافقی دو نقطهٔ آن، مساوی‌فاصلهٔ تصاویر قائم همان‌دو نقطه است وهر نقطه‌که بعدش بیشتر باشد ، ارتفاعش هم بیشتراست .

۱۳ـ اگرنیمرخی موازی‌با نیمساز فرجهٔ دوم باشد، فاصلهٔ تصاویرافقی دونقطهٔ آن، مساوی فاصلهٔ تصاویرقائم همان دونقطه‌است؛ اماهرنقطه‌که بعدش بیشتر باشد ، ارتفاعش‌کمتر است .

تمرین

۱ـ بر روی یك رابط و در دوطرف خطزمین، دونقطه به‌یك فاصله از این خط اختیارکنید ودر مقابل نقطه‌ای‌که بالای xy است، حرف e′ ودرمقابل نقطه‌ای‌که زیرxy است، سه‌حرف e و f و f′ را بنویسید وتحقیق‌کنیدکه خط efe′f′ چگونه است؟ اگر به جای e، e′ وبه جای e′ ، e بنویسید، وضع efe′f′ چگونه خواهد بود ؟

۲ـ سه‌رأس مربعی‌که دریك صفحهٔ نیمرخ‌است، برروی نیمساز فرجه ـ های اول و دوم قرار دارند ؛ تصویر قائم یك رأس داده شده است ، تصاویر رئوس دیگر را بدست آورید .

۳ـ در دوطرف xy وبه یك فاصله از آن، دونقطه اختیار کنید و در مقابل‌آن‌که بالای xy است، حروف a و b′ و درمقابل آن‌که زیر xy است، حروف c و d′ بنویسید و تصاویر دیگر این نقاط را روی خط زمین قرار

دهید . معلوم کنید شکل فضایی که چهار نقطه را به هم مربوط می‌کند ، چه شکلی است .

۴ـ در روی دو رابط متمایز، دونقطه به‌فاصلهٔ ۳ ازخط‌زمین دربالای این خط و دونقطه به فاصلهٔ ۵ از خط زمین در زیر این خط اختیار کرده و تحقیق‌کنیدکه‌خطی‌که این دونقطه‌را به‌هم‌ربط دهد چگونه‌است، درصورتی‌که:

الف ـ نقاط بالای xy را b و a ونقاط زیر xy را b' و a' بنامیم.

ب ـ نقاط بالای xy را m و n' و نقاط زیر xy را m' و n نام بگذاریم .

۵ ـ بعد دونقطهٔ A و B ازحیث قدر مطلق یکی‌است؛ همچنین ارتفاع آن دونقطه . معین‌کنید خط AB چگونه خطی است ، درصورتی‌که :

الف ـ a و b زیر و a' و b' بالای xy باشند .

ب ـ a و a' و b' زیر xy باشند .

ج ـ a' بالای xy و a و b و b' زیرآن باشند .

د ـ b زیر xy و b' و a و a' بالای‌آن باشند .

۶ ـ ثابت‌کنیدکه دوخط که در دو نقطهٔ مختلف بر xy عمود باشند ، یا یك خط عمود بر xy ویك خط مایل نسبت به‌آن، یایك خط مایل نسبت‌به xy ویك نقطه ممکن نیست تصاویر یك خط باشند .

۷ ـ مطلوب است مکان هندسی آثار افقی خطوط بیشماری‌که برنقطهٔ مفروض aa' می‌گذرند و با صفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ α می‌سازند . (مثال عددی $\alpha = ۶۰°$). آیا می‌توانید یکی ازخطوط بیشمار را درهندسهٔ ترسیمی بکشید وبه‌کمك آن، مکان مطلوب را رسم‌کنید ؟

۸ ـ درچه صورت خطاافقی یا جبهی، نیمساز فرجه‌هارا قطع نمی‌کند ؟

۹ ـ برنقطهٔ مفروض، یك خطاافقی (جبهی) بگذرانیدکه خط مفروضی را قطع‌کند .

۱۰ ـ خطی چنان رسم‌کنیدکه خطوط زیررا قطع‌کند :

الف ـ دوخط قائم و دوخط منتصب مفروض .

ب ـ دوخط قائم ویك خط منتصب ، ویك‌خط غیر مشخص مفروض .

ج ـ یك خط قائم ، یك منتصب یك مواجه وخط زمین .

د ـ یك خط قائم ، یك‌خط منتصب ، خط زمین و خط دیگری‌که خط زمین را تلاقی‌کرده باشد .

۱۱ ـ بر نقطهٔ مفروض A خطی بگذرانید که با نیمساز فرجهٔ اول (یا دوم) موازی باشد وخط مفروضی را قطع‌کند .

۱۲ ـ بر نقطهٔ مفروض ، خطی بگذرانید که با هر دو نیمساز فرجه موازی باشد .

۱۳ ـ خطی رسم‌کنید که قائم ومنتصب مفروضی را قطع‌کند و : الف ـ باخط مفروضی موازی باشد. ب ـ درصفحهٔ نیمسازفرجهٔ اول واقع‌باشد. ج ـ در صفحهٔ نیمساز فرجهٔ دوم واقع باشد .

۱۴ ـ تصاویر سه رأس متوازی الاضلاع داده شده‌اند . ملخص شکل‌را کامل کنید .

۱۵ ـ یك خط افقی (یا جبهی) رسم‌کنیدکه بر نقطهٔ معینی بگذرد و با صفحهٔ تصویر زاویهٔ معینی بسازد .

۱۶ ـ تصویر افقی ویك نقطه ازتصویر قائم خطی داده شده‌اند ؛ خط را چنان مشخص سازیدکه نیمساز فرجهٔ اول (یادوم) را درنقطه‌ای به ارتفاع معین قطع‌کند .

۱۷ ـ دومنتصب DD' و $D_1D'_1$ داده شده‌اند . منتصب دیگری رسم کنید که فاصله‌اش از اولی l و از دومی l' باشد . در شرط وجود و تعداد جوابها بحث‌کنید .

۱۸ ـ ثابت‌کنیدکه اگر تصویرهای غیر همنام دوخط منطبق باشند ،آن دوخط نسبت به نیمساز فرجهٔ دوم قرینهٔ یکدیگرند .

۱۹ ـ از نقطهٔ مفروض، خطی موازی‌بانیمسازفرجهٔ اول (یا دوم) رسم کنیدکه تصویر افقیش با خط زمین زاویهٔ α بسازد .

۲۰ ـ از نقطهٔ مفروض ، خطی عمود برنیمساز فرجهٔ اول رسم‌کنید .

۲۱ ـ از نقطهٔ مفروض ، خطی برنیمساز فرجهٔ دوم عمودکنید .

۲۲ ـ برخط مفروض ، نقطه‌ای معین‌کنید که مجموع یا تفاضل بعد و ارتفاعش m باشد. حالت مخصوص، وقتی‌که خط، قائم یامنتصب‌یا نیمرخ‌باشد.

۲۳ ـ بر نقطهٔ aa' خطی مرور دهید که‌بعد اثر افقی و ارتفاع اثر

قائمش متساوی باشند . مسئله چند جواب دارد ؟

مسئله را در این حالتهای خاص حل کنید : الف ـ تصویرقائم خط بر نقطهٔ معینی بگذرد. ب ـ تصویر افقی خط باخط زمین زاویهٔ معینی بسازد .

۲۴ ـ بر نقطهٔ مفروض A نیمرخی بگذرانید که : الف ـ نسبت بین ارتفاع اثرقائم وبعد اثر افقیش k باشد. ب ـ نسبت قطعات محصوربین A و آثار خط مساوی m باشد .

۲۵ ـ مطلوب است مکان هندسی آثار خطوطی که بریك نقطهٔ مفروض بگذرند و باصفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول (یا دوم) موازی باشند .

۲۶ ـ یك خط افقی یا جبهی چنان رسم‌کنیدکه دوخط متنافر مفروض را قطع‌کند وفاصلهٔ دونقطهٔ تقاطع به طول معین l باشد. برحسب طول l در تعداد جوابها بحث‌کنید .

۲۷ ـ یك خط افقی(یاجبهی) چنان رسم‌کنیدکه دوخط متنافر مفروض را قطع‌کند وتصویر افقی (یاقائم) آن موازی امتداد معینی باشد .

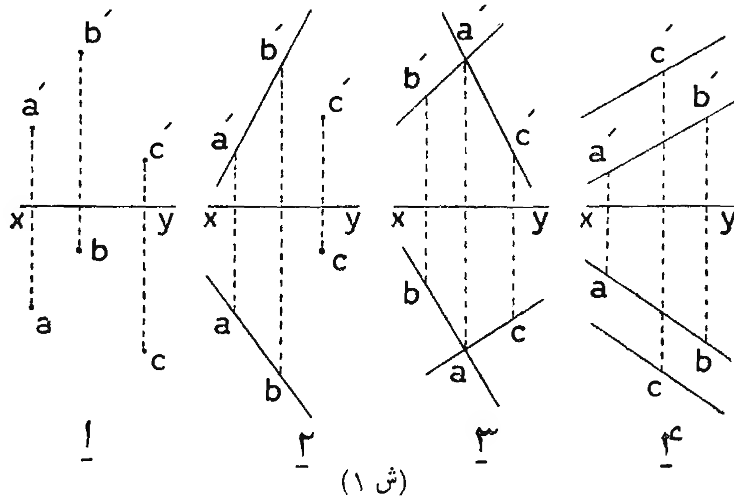
۲۸ ـ ثابت کنید که اگر تصاویر قائم دوخط متنافر متوازی باشند ، تصاویر قائم تمام خطوط جبهی‌که‌آنها را قطع‌کنند ، بریك نقطه می‌گذرند .

راهنمایی ـ این نقطه واقع است بر رابط نقطهٔ تلاقی تصویر افقی دو خط مفروض .

فصل سوم

صفحه

۱ ـ نمایش صفحه ـ در هندسه، صفحه به‌وسیلهٔ سه‌نقطهٔ غیر واقع بر یك استقامت ، یك خط و یك نقطه در خارج آن ، دو خط متقاطع ، یا دوخط متوازی مشخص می‌شود . درهندسهٔ ترسیمی نیز صفحه به‌وسیلهٔ تصاویرسه نقطه (شکل۱ـ۱)، یك خط و یك نقطه (شکل ۱ـ۲)، دوخط متقاطع (شکل ۱ ـ ۳) ، یا دو خط متوازی (شکل ۱ ـ ۴) نمایش داده می‌شود .

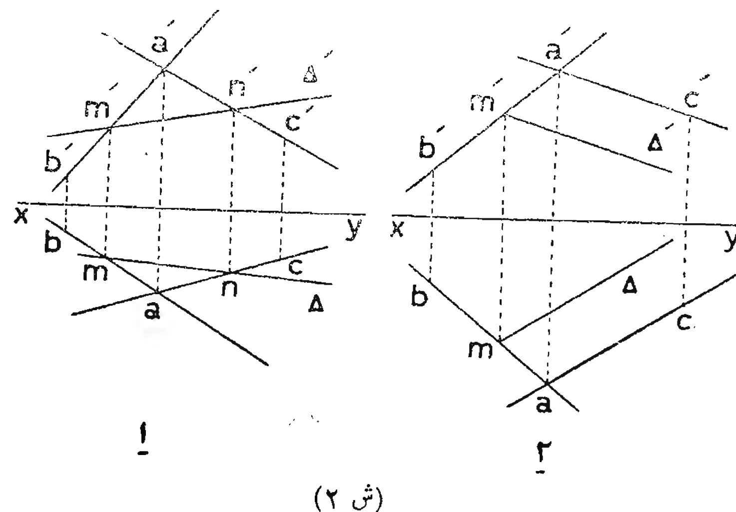


(ش ۱)

بطوری که ازشکل نیز پیداست، هرچهار صورت ، یك صفحه را نمایش می‌دهند .

۲ـ مسئله ـ صفحه ای با سه نقطهٔ A و B و C مشخص است؛ Δ تصویر افقی خطی‌از این صفحه در دست است ، Δ' تصویر قائم آن را بدست آورید .

$aba'b'$ و $aca'c'$ را وصل می‌کنیم (شکل ۲) . چون Δ درآن صفحه است ، یا هردو خط را قطع می‌کند (شکل ۲ـ۱) ، یا با یکی از آنها موازی و بادیگری متقاطع است (شکل ۲ـ۲) . اگر Δ تصویرهای افقی دوخط ، یعنی ab و ac ، را در m و n قطع کند، m' و n' را بر $a'b'$ و $a'c'$ بدست می‌آوریم ؛ $m'n'$ تصویر مطلوب است . ولی هرگاه Δ با ac موازی باشد و ab را در m قطع کند، m' را بر $a'b'$ بدست آورده از m' خط Δ' را موازی‌با $a'c'$ می‌کشیم ؛ Δ' تصویرمطلوب‌است .



(ش ۲)

تمرین ۱ـ تصویرقائم خطی ازصفحهٔ مفروضی داده شده است؛ تصویر افقی آن را بدست آورید .

تمرین ۲ـ الف ـ در صفحهٔ مفروضی یك خط افقی و یك جبهی رسم کنید . ب ـ تحقیق کنید که در یك صفحه ، خطوط افقی و جبهی بیشمار می‌توان رسم کرد .

۳ ـ خطوط افقی وجبهی یك صفحه، فصل مشترکهای آن صفحه‌اند با صفحاتی که موازی‌باصفحهٔ افقی تصویر یاصفحهٔ قائم تصویر رسم شوند.

۴ ـ تمام خطوط افقی یك صفحه متوازیند ، زیرا که خطوط واقع دریك صفحه یامتقاطعند یامتوازی و خطوط افقی صفحه که تصاویر قائمشان متوازیند ، متقاطع نمی‌توانند باشند .

به همین دلیل ، خطوط جبهی یك صفحه متوازیند .

۵ ـ مسئله ـ در صفحهٔ مفروضی یك خط افقی به ارتفاع h رسم کنید .

تصویرقائم‌آن را موازی باخط‌زمین و به فاصلهٔ h از آن رسم‌کرده تصویر افقی آن را بدست می‌آوریم .

۶ ـ آثار صفحه ، اثر افقی و قائم ـ فصل مشترك هر صفحه با صفحهٔ افقی تصویر را **اثر افقی** ، و فصل مشترکش با صفحهٔ قائم تصویر را **اثر قائم** آن صفحه می‌نامند .

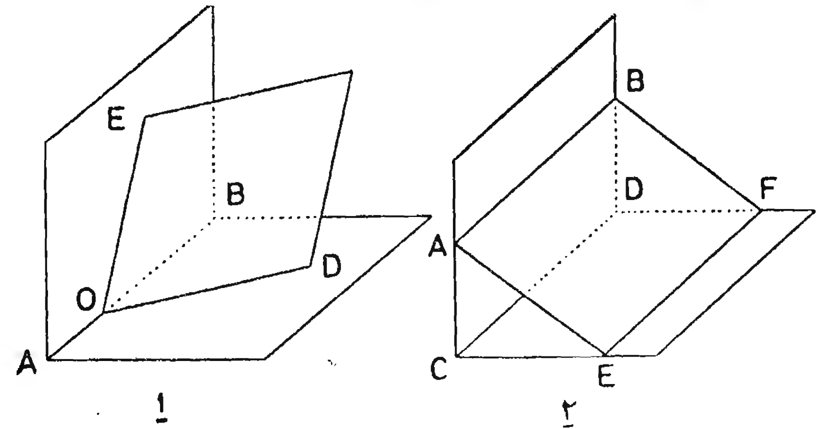
اثر افقی صفحه، خطی‌است افقی به ارتفاع صفرو اثرقائم‌آن، خطی است جبهی به بعد صفر .

۷ ـ قضیه ـ آثار افقی وقائم صفحه، یایکدیگر را در روی خط زمین قطع می‌کنند یا بایکدیگر موازیند .

در هندسهٔ فضایی ثابت شده است که هرگاه سه صفحه دو بدو یکدیگررا قطع‌کنند ، سه فصل مشترك یا بر یك نقطه می‌گذرند (شکل ۳ـ۱) ، یا متوازیند (شکل ۳ـ۲) .

درهندسهٔ ترسیمی، هرصفحه‌باصفحات‌افقی وقائم‌تصویر، سه‌صفحه‌اند که فصل مشترکهایشان دو بدو اثر افقی صفحه و اثر قائم صفحه و خط

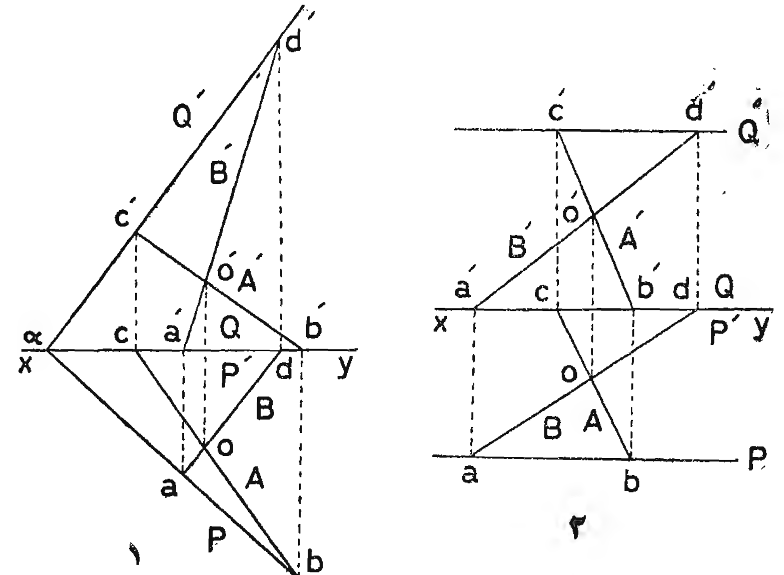
زمین هستند ؛ پس این سه خط یا بر یك نقطه می‌گذرند یا متوازیند .



(ش ۳)

۸ ـ مسئله ـ آثار صفحه‌ای را که به دو خط متقاطع AA' و BB' نموده شده است، بدست آورید .

راه اول ـ اثر افقی، خطی است افقی و به ارتفاع صفر؛ پس تصویر قائم آن برخط زمین منطبق است. دراین صورت، تصویرقائم خطی داده شده است و تصویر افقی آن را بدست می‌آوریم (شکل ۴) .



(ش ۴)

این تصویر افقی که آن را P می‌نامیم ، یا خط زمین را در α قطع می‌کند (شکل۴ـ۱)، یا با آن موازی است (شکل۴ـ۲). در صورت‌اول، یعنی وقتی که P خط زمین را در α قطع کند ، اثر قائم صفحه نیز بر α خواهدگذشت و برای رسم‌آن، تعیین یك نقطهٔ دیگرکافی است . برای تعیین این نقطه توجه می‌کنیم که **اثر قائم ، خطی است جبهی به بعد صفر ، پس تصویر افقی آن برخط زمین منطبق است ؛** این تصویر افقی با تصویر افقی یکی از دو خط مفروض ، مثلاً A ، در c تلاقی می‌کند ؛ c' را به کمك رابط بدست می‌آوریم ؛ نقطهٔ cc' متعلق است به اثر قائم صفحه و $\alpha c'$ تصویر قائم اثر قائم صفحه است ، آن را Q' می‌نامیم .

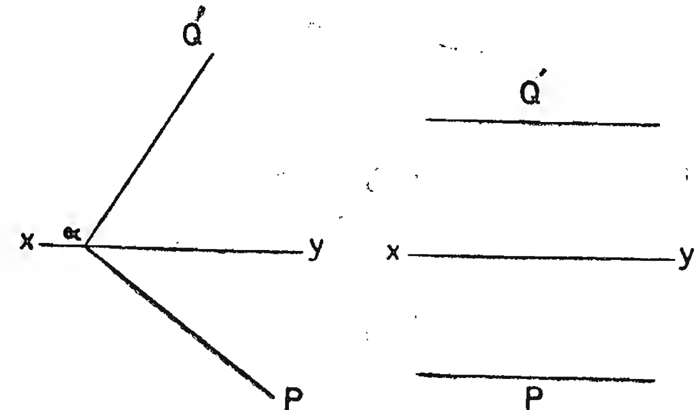
هرگاه P ، اثر افقی، با خط زمین موازی باشد ، اثر قائم‌هم با آن موازی‌خواهد بود و برای رسم آن، باز هم‌کافی است‌که یك نقطه بدست آید . این نقطه را به همان طریقه که برای صورت اول گفتیم بدست می‌آوریم و ازآن، خطی موازی با xy می‌کشیم؛ خطاخیر،Q'، تصویرقائم اثر قائم صفحه است .

P' تصویر قائم اثر افقی و Q تصویر افقی اثر قائم، بر xy منطبقند .

راه دوم ـ اثر افقی صفحه، مکان هندسی آثارافقی تمام خطوط آن صفحه است . پس برای تعیین اثر افقی صفحه‌کافی است aa' و bb' آثار افقی دو خط آن‌را بدست‌آورده آنها را به هم وصل‌کنیم (شکل۴). برای تعیین اثرقائم صفحه کافی است اثر قائم یکی از خطوط آن مثلاً AA' ، اثرقائم cc' ، را بدست‌آوریم؛ زیرا که اگر اثرافقی خط زمین را در α قطع کند ، α یك نقطهٔ دیگر از اثر قائم است ؛ و اگر اثرافقی

با خط زمین موازی باشد، اثر قائم هم با آن موازی خواهد بود و برای رسم اثر قائم ، نقطهٔ c' کافی است .

۹ ـ اهمیت آثار صفحه ـ آثار صفحه ، برای نمایش دادن یك صفحه ، ساده ترین وسیله‌اند ؛ زیرا که یك تصویر هر یك از آنها بر xy منطبق است و نقطهٔ تقاطعشان نیز بر این خط قرار دارد ؛ در نتیجه برای نمایش صفحه ، رسم دوخط αP (تصویر افقی اثر افقی) و $\alpha Q'$ (تصویر قائم اثر قائم) کافی است (شکل ۵) . معمولاً از نوشتن حروف P' و Q



(ش ۵)

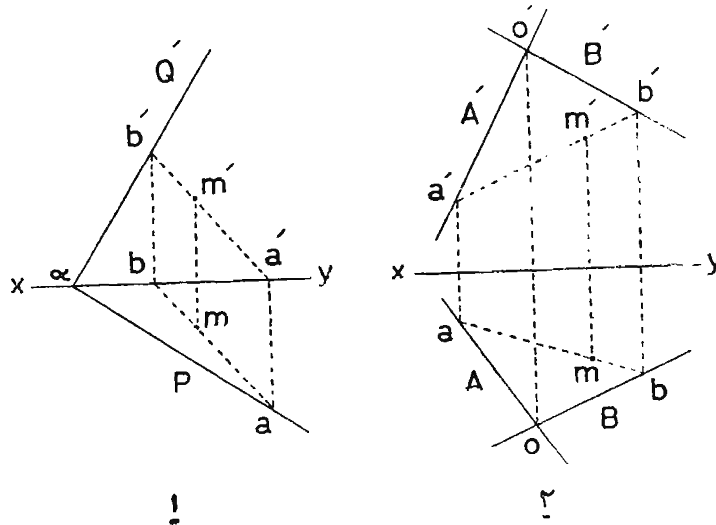
بر روی خط زمین خود داری می‌شود ؛ زیرا می‌دانیم که تصویر افقی اثر قائم و تصویر قائم اثر افقی بر روی xy هستند و تصریح آن لازم نیست.

تمرین۱ـ در صفحه‌ای‌که به وسیلهٔ آثارش نموده شده است، تصویرافقی یا (قائم) یك‌خط داده شده است؛ تصویر قائم یا (افقی) آن را بدست‌آورید .

تمرین ۲ـ در صفحه‌ای‌که به وسیلهٔ آثارش نموده شده است، یك خط افقی به ارتفاع h یا یك خط جبهی به بعد e رسم کنید .

۱۰ـ مسئله ـ m تصویرافقی یك نقطه از صفحه داده شده است ؛ m' تصویر قائم آن را بدست آورید .

بر m یك خط دلخواه مانند ab مرور می‌دهیم و آن را تصویر افقی خطی از صفحه فرض کرده $a'b'$ تصویر قائم آن را بدست می‌آوریم (شکل۶) . تصویر قائم نقطهٔ مفروض، بر روی $a'b'$ است؛ آن‌را به‌وسیلهٔ رسم رابط نقطهٔ m پیدا می‌کنیم .



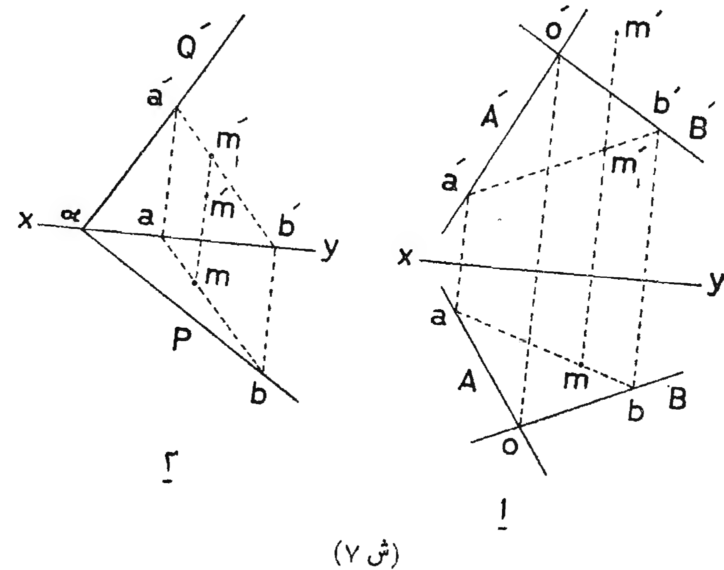
(ش ۶)

تمرین ـ درصفحه‌ای‌که به وسیلهٔ آثارش نموده شده باشد، تصویر قائم یك نقطه داده شده است ؛ تصویر افقی آن را : الف ـ به کمك یك خط غیر مشخص . ب ـ به کمك یك خط افقی . ج ـ به کمك یك خط جبهی ، بدست آورید .

۱۱ـ مسئله ـ در شکل ۷ ، صفحه‌ای و یك نقطهٔ mm' داده شده‌اند ؛ تحقیق کنیدکه mm' در آن صفحه هست یا نیست .

از m' ، تصویر قائم نقطه ، صرف نظر می‌کنیم و به فرض اینکه m تصویر افقی یك نقطهٔ صفحهٔ مفروض باشد ، تصویر قائم آن را بدست

می‌آوریم و آن را m'_1 می‌نامیم ؛ اگر m'_1 بر m' منطبق شود ، نقطهٔ مفروض در صفحه است و الا نیست . در صورتی‌که نقطه در صفحه نباشد ، اگر ارتفاع m'_1 از ارتفاع m' کمتر شود (شکل۷ـ۱)، mm' بالای صفحه است (یعنی از صفحهٔ افقی دورتر است) و اگر ارتفاع m'_1 از ارتفاع m' بیشتر باشد (شکل ۷ـ۲) ، mm' زیر صفحه است (یعنی به صفحهٔ افقی نزدیکتر است) .



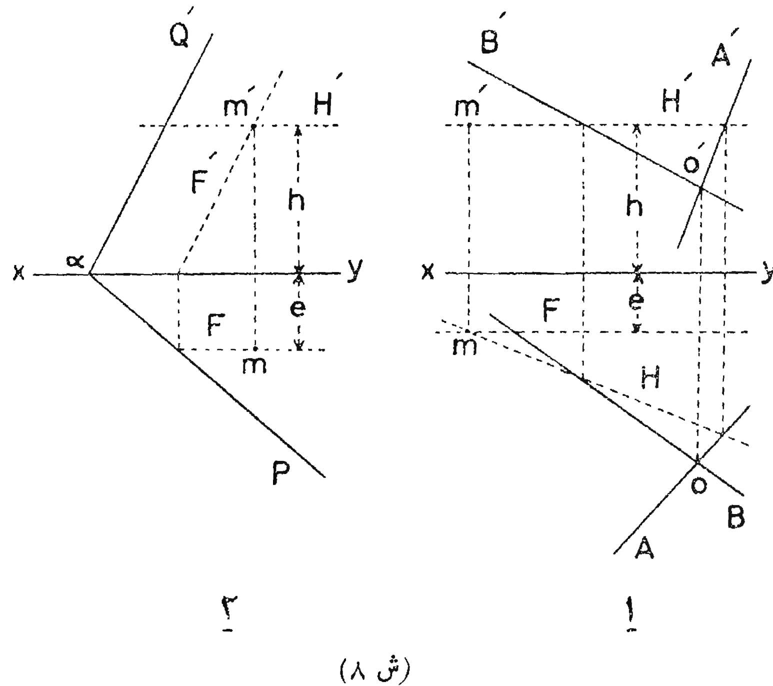
(ش ۷)

تمرین ــ نقطه‌ای وصفحه‌ای رسم‌کنید و تحقیق کنیدکه نقطه درصفحه هست یا نیست . در صورتی که نقطه در صفحه نباشد، تحقیق کنیدکه آیا جلو صفحه است یا عقب آن (یعنی از صفحهٔ قائم تصویر دورتر است یا به آن نزدیکتر) .

۱۲ـ مسئله ــ در صفحهٔ مفروض، نقطه‌ای به بعد e وارتفاع h معین کنید .

خط جبهی FF' را به بعد e و خط افقی HH' را به ارتفاع h رسم می‌کنیم ؛ mm' ، نقطهٔ تقاطع آنها ، جواب مسئله است .

بطوری‌که درشکل می‌بینید، احتیاجی به کشیدن تصویر قائم خط جبهی یا تصویر افقی خط افقی (شکل ۸ ــ ۱ و ۲) نیست ، یعنی رسم



(ش ۸)

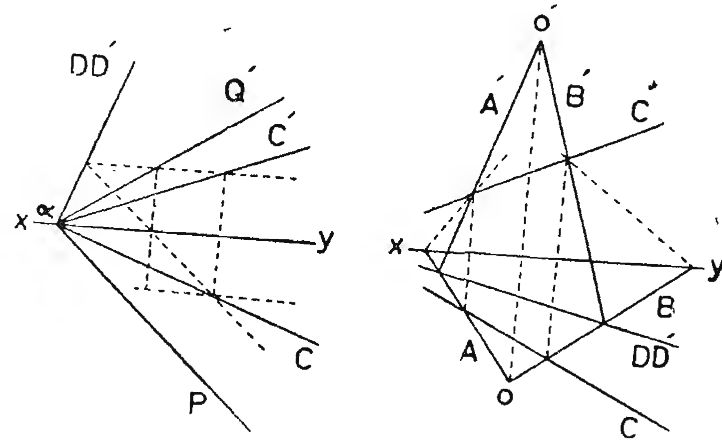
هردو تصویر یکی ازخطوط افقی یا جبهی مذکور و یك تصویرخط دیگر کافی است .

۱۳ــ نکتهٔ مهم این‌است که‌درهرشکل ترسیمی، بطور عادی عدهٔ زیادی خط رسم می‌شود ، بنابراین هرچه‌ممکن باشدبایددررسم خطوط صرفه‌جویی کرد تاشکل‌درحدودامکان‌خلوت‌تر وقابل‌استفاده‌تر باشد.

تمرین ـ تحقیق کنیدکه آیا حل مسئلهٔ شمارهٔ ۱۲ درصورتی‌که آثار صفحه با خط زمین موازی باشند ، ممکن است ؟ اگرممکن نیست دلیل آن را پیدا کنید .

۱۴ ـ خطوط مهم صفحه ـ در هرصفحه خطهای بیشمار وجود دارند؛ ازآن‌میان، برخی اهمیت بسیار دارندکه عبارتند از: آثار صفحه، خطوط افقی و جبهی ، فصل مشترکهای صفحه با نیمساز فرجه‌های اول و دوم و خطهای بزرگترین شیب نسبت به صفحات افقی و قائم . آثار صفحه و خطوط افقی و جبهی را قبلاً دیده‌ایم ؛ اینك در بارهٔ سایر خطوط مهم صفحه مطالعه می‌کنیم :

۱۵ ـ فصل مشترك صفحه با نیمساز فرجه ها ـ برای تعیین فصل مشترك صفحه با نیمساز فرجهٔ‌اول (یا دوم)، کافی است که نقاط تلاقی دوخط آن‌را با این‌صفحه بدست آوریم (شکل ۹). اگر صفحه با آثارش



(ش ۹)

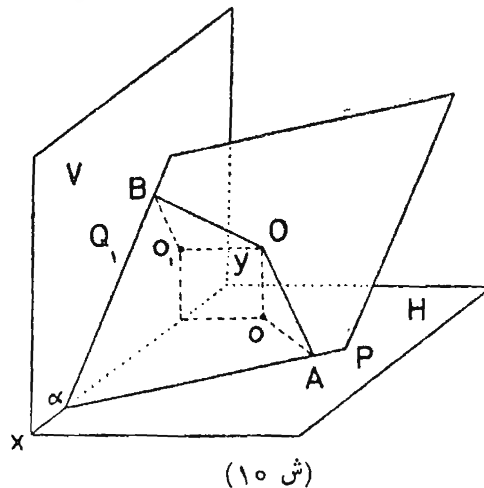
نموده شده و α نقطهٔ تلاقی آثار باشد ، α یکی از نقاط مطلوب است و کافی است که یك نقطهٔ دیگر بدست آید .

در شکل ۹ ، CC' فصل مشترك صفحه با نیمساز فرجهٔ اول و DD' فصل مشترك آن با نیمساز فرجهٔ دوم است .

تمرین ـ اگرآثارصفحه‌ای با خط زمین موازی باشند ، برای تعیین فصل مشترك آن با نیمساز فرجه‌ها چند نقطه لازم است ؟ به چه دلیل ؟

۱۶ ـ خطوط بزرگترین شیب یك صفحه نسبت به صفحات تصویر ـ می‌دانیم که خط بزرگترین شیب صفحهٔ P نسبت به صفحهٔ افقی H (شکل ۱۰)، خطی است ازصفحهٔ P مانند OA که بر اثر افقی صفحه ، یعنی فصل مشترك صفحه و صفحهٔ افقی، عمود باشد . بدیهی است که این خط بر تمام خطوط افقی صفحهٔ P عمود است ، و چون تصویر افقی زاویهٔ قائمهٔ OAP زاویه‌ای است قائمه ، پس :

> **تصویر افقی خط بزرگترین شیب صفحه‌ای نسبت به صفحهٔ افقی، عمود است بر اثر افقی و تصویر افقی سایر خطوط افقی صفحه .**



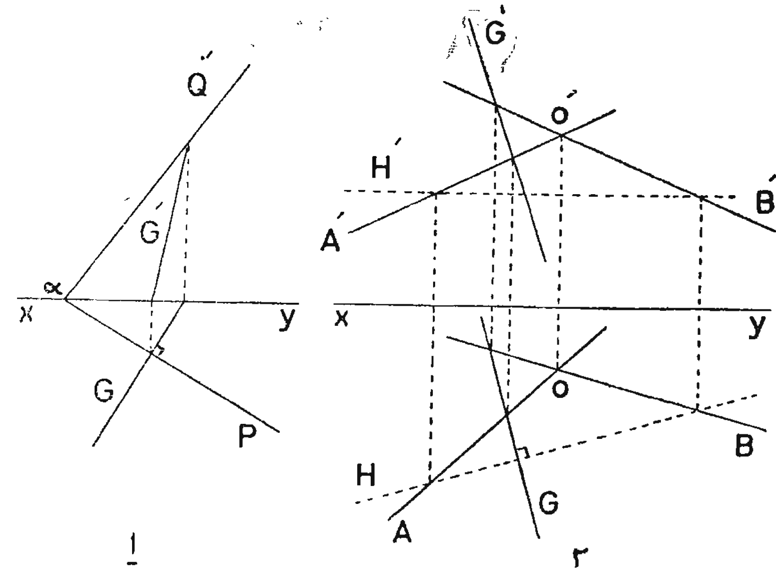
(ش ۱۰)

به دلیل مشابه: **تصویر قائم خط بزرگترین شیب صفحه نسبت به صفحهٔ قائم، عمود است بر اثر قائم و تصویر قائم سایر خطوط جبهی صفحه** . بدیهی‌است

که در هر صفحه ، خطوط بزرگترین شیب بیشمار نسبت به صفحهٔ افقی می‌توان رسم کرد که همه باهم موازیند ؛ و همچنین است نسبت به صفحهٔ قائم .

۱۷- مسئله - در صفحهٔ مفروض، یك خط بزرگترین شیب نسبت به صفحهٔ افقی رسم کنید .

هرگاه صفحه به‌وسیلهٔ آثارش نموده شده باشد (شکل ۱۱ - ۱)

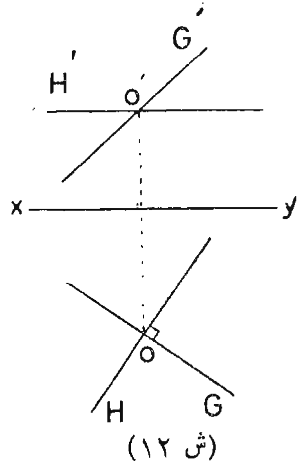


(ش ۱۱)

تصویر افقی خط بزرگترین شیب را به αP عمود می‌کنیم (خط G) و تصویرقائم آن ، G' ، را بدست می‌آوریم .

اگر صفحه به‌وسیلهٔ دو خط نمایش داده شده باشد (شکل۱۱-۲)، اول یك خط افقی مانند HH' در صفحه رسم می‌کنیم ، آنگاه تصویر افقی بزرگترین شیب را عمود بر H می‌کشیم (خط G) و تصویر قائمش، G' ، را تعیین می‌کنیم .

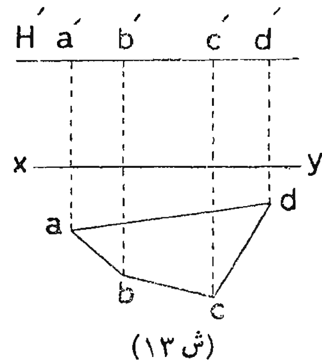
۱۸ - اهمیت خط بزرگترین شیب در این است که بتنهایی برای مشخص‌کردن صفحه کافی است . در حقیقت اگر GG' (شکل۱۲) خط بزرگترین شیب صفحه‌ای نسبت به صفحهٔ افقی باشد ، صفحه کاملاً مشخص است ؛ زیرا که از هر نقطهٔ GG' می‌توان فوراً یك خط افقی از صفحه را رسم کرد و صفحه را با دوخط مشخص‌کرد (H ، تصویر افقی خط افقی، عموداست بر G و H' تصویر قائمش، موازی است با xy) .



(ش ۱۲)

۱۹ - صفحات مهم - در میان صفحات بیشماری که می‌توان رسم کرد ، شش صفحه دارای وضع خاص هستند و از این‌رو صفحات مهم نامیده می‌شوند و آنها عبارتند از: صفحات **افقی**، **جبهی**، **قائم** ، **منتصب**، **مواجه** و **نیمرخ** . این صفحات ، مانند خطوط همنام خود ، یا موازی صفحات تصویر و خط زمین هستند یا عمود بر آنها .

۲۰ - صفحهٔ افقی (شکل۱۳) ، موازی است با صفحهٔ افقی تصویر . بنابراین، اثرافقی ندارد و اثرقائمش، H' ، با خط زمین موازی‌است (زیرا که فصل مشترکهای یك صفحه با دو صفحهٔ متوازی، متوازیند). تصویرقائم هر نقطه یا هر خط که در صفحهٔ افقی



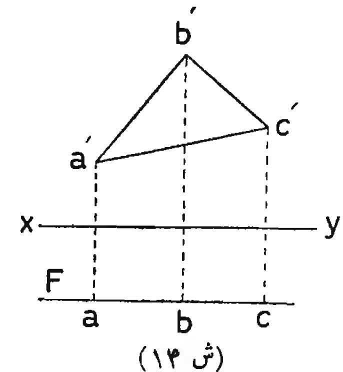
(ش ۱۳)

باشد ، بر اثر قائم آن واقع می‌شود ؛ مثلاً اگر چهارضلعی ABCD در صفحهٔ افقی H' واقع بوده و abcd تصویر افقی آن باشد ، $a'b'c'd'$ تصویرقائم چهارضلعی نامبرده، بر H' قرار خواهد داشت (شکل ۱۳) .

طول خطوط و اندازهٔ زوایایی که در یك صفحهٔ افقی باشند ، در تصویر افقی به مقدار حقیقی است .

تمرین ـ در یك صفحهٔ افقی به‌ارتفاع ۳ دو نقطهٔ A و B را به بعد ۶ و ۷ تعیین‌کنید بقسمی‌که فاصلهٔ رابطهایشان ۴ و B طرف راست A باشد . آنگاه درهمان صفحه مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازیدکه AB یك ضلع آن باشد.

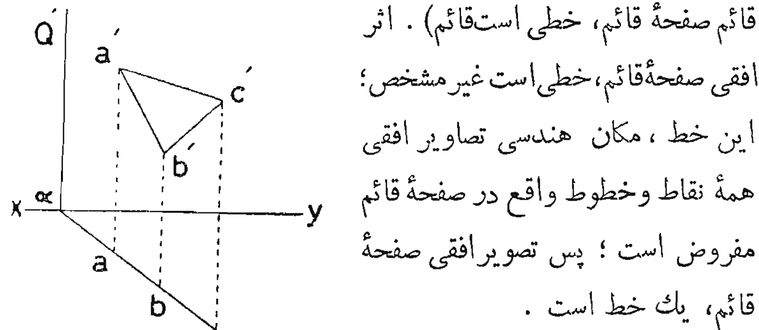
۲۱ـ صفحهٔ جبهی (شکل ۱۴)، موازی‌باصفحهٔ‌قائم‌تصویر است. به‌دلیلی شبیه آنچه در بارهٔ صفحهٔ‌افقی گفتیم، صفحهٔ‌جبهی اثرقائم ندارد و اثر افقیش موازی با xy است. تصاویر افقی تمام نقاط و خطوط صفحهٔ جبهی، بر روی اثر افقی آن واقع می‌شوند وطولها و زوایای اشکال واقع درصفحهٔ جبهی، در تصویر قائم به مقدار حقیقیند .



(ش ۱۴)

تمرین ـ در یك صفحهٔ جبهی به بعد ۲ مربعی بسازید که یك رأسش A به‌ارتفاع ۳ و رأس دیگرش B به‌ارتفاع ۴ طرف راست A باشد وفاصلهٔ رابطهای آن دو نقطه ۳ و ارتفاع دورأس دیگر، از ارتفاع A و B زیادتر باشد .

۲۲ ـ صفحهٔ قائم (شکل۱۵)، عمود است برصفحهٔ افقی تصویر؛ پس اثرقائمش عمود است بر xy (زیرا اگر دوصفحهٔ متقاطع برصفحهٔ ثالثی عمود باشند ، فصل مشترکشان هم بر آن صفحه عمود است ؛ یعنی اثر قائم صفحهٔ قائم، خطی است‌قائم) . اثر افقی صفحهٔ‌قائم، خطی‌است غیرمشخص؛ این خط ، مکان هندسی تصاویر افقی همهٔ نقاط وخطوط واقع در صفحهٔ قائم مفروض است ؛ پس تصویرافقی صفحهٔ قائم، یك خط است .



(ش ۱۵)

زاویه‌ای‌که اثر افقی صفحهٔ قائم با خط زمین‌می‌سازد، مسطحهٔ فرجه‌ای است که صفحهٔ قائم مفروض با صفحهٔ قائم تصویر تشکیل می‌دهد ؛ زیرا که هردو ضلع آن، αP و xy ، بر فصل مشترك صفحات مذکور عمودند ؛ پس زاویهٔ بین هرصفحهٔ قائم وصفحهٔ قائم تصویر، همان زاویهٔ بین اثرافقی آن و خط زمین است .

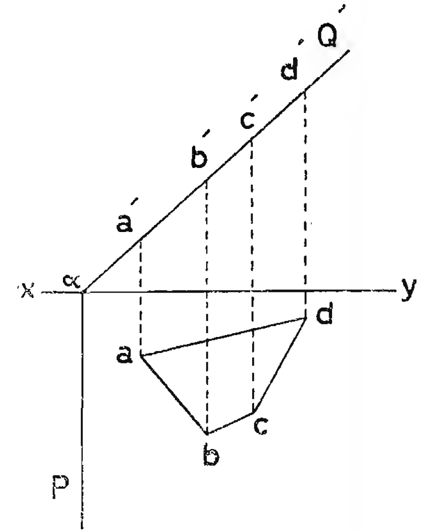
تمرین ۱ـ تحقیق‌کنید جبهیه‌های صفحهٔ قائم، چگونه خطوطی‌هستند.

تمرین ۲ـ در صفحهٔ قائم مفروضی تصویر قائم نقطه‌ای داده‌شده است؛ تصویر افقی‌آن را بدست آورید . آیا ممکن است به جای تصویرقائم، تصویر افقی‌داده شود و تصویر قائم را معین‌کنیم ؟ برای اینکه قسمت آخرتمرین را بتوان حل کرد، علاوه بر تصویر افقی نقطه چه شرطی باید داده شود ؟

تمرین ۳ـ بر نقطهٔ مفروض aa' صفحهٔ قائمی بگذرانید که با صفحهٔ قائم تصویر زاویهٔ °۳۰ بسازد . مسئله چند جواب دارد ؟

۲۳ ـ صفحهٔ منتصب

(شکل ۱۶) ، عمود است بر صفحهٔ قائم تصویر. اثرافقی‌آن، عمود است بر xy و اثرقائمش غیر مشخص است . تصویر قائم صفحهٔ منتصب خطی‌است مستقیم که مکان هندسی تصاویر قائم همهٔ نقاط و خطوط صفحه است. زاویهٔ صفحهٔ منتصب با صفحهٔ افقی تصویر، مساوی زاویهٔ بین اثرقائم آن و خط زمین است.

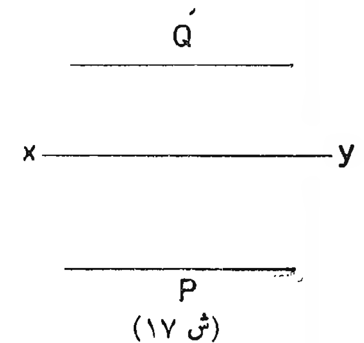


(ش ۱۶)

تمرین ۱ـ فرق یا شباهت بین صفحهٔ منتصب و صفحهٔ افقی چیست ؟ همچنین بین صفحهٔ جبهی و صفحهٔ قائم ؟

تمرین ۲ـ درصفحهٔ منتصب مفروض، نقطه‌ای به‌ارتفاع h بدست‌آورید (عدهٔ جوابها؟) ؛ آیا ممکن است این مسئله را در مورد صفحهٔ افقی مفروض حل کرد ؟

۲۴ـ صفحهٔ مواجه (شکل۱۷)، موازی است با خط زمین . پس هردو اثرش با آن موازیند (زیرا که اگر فرضاً صفحه و خطی متوازی باشند ، هر صفحهٔ دیگر که برخط مرور کرده و صفحهٔ مفروض را قطع کند ، فصل مشترك ، با خط مفروض موازی خواهد بود) .



(ش ۱۷)

تمرین ۱ـ در نمایش یك خط مواجه و یك صفحهٔ مواجه چه تفاوتی است ؟

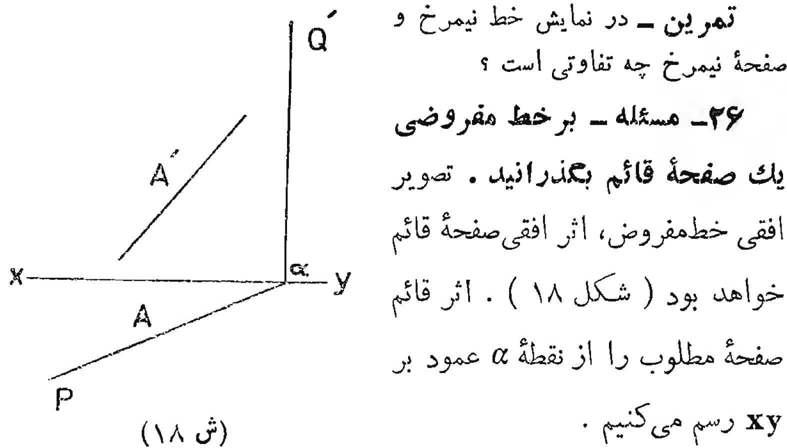
تمرین ۲ ـ بریك خط غیرمشخص، صفحهٔ مواجهی بگذرانید و آثارش را رسم‌کنید . مسئله را در مورد خط نیمرخ نیز حل کنید .

تمرین ۳ ـ خط بزرگترین شیب یك صفحهٔ مواجه را نسبت به صفحهٔ افقی تصویر بدست آورید. این خط چگونه خطی خواهد بود؟ آیا بین‌خطوط بزرگترین شیب یك صفحهٔ مواجه نسبت به صفحات تصویر ارتباطی هست ؟ تحقیق کنیدکه خطوط بزرگترین شیب صفحات افقی ، جبهی ، قائم ومنتصب نسبت به صفحات تصویر چگونه خطوطی هستند ؟

۲۵ـ صفحهٔ نیمرخ ، بطوری‌که‌در فصل اول دیده‌ایم ، عمود است بر xy و آثارش برامتداد یکدیگر و بر xy عمودند .

تمرین ـ در نمایش خط نیمرخ و صفحهٔ نیمرخ چه تفاوتی است ؟

۲۶ـ مسئله ـ برخط مفروضی یك صفحهٔ قائم بگذرانید . تصویر افقی خط‌مفروض، اثر افقی‌صفحهٔ قائم خواهد بود (شکل ۱۸) . اثر قائم صفحهٔ مطلوب را از نقطهٔ α عمود بر xy رسم می‌کنیم .



(ش ۱۸)

تمرین ـ بر خط مفروض AA' صفحه‌ای بگذرانید که زاویهٔ بین تصویر قائم اثرقائم و تصویر افقی اثر افقیش φ باشد . مثال عددی :

$\varphi=۳۰°$ ، $\varphi=۶۰°$ ، $\varphi=۹۰°$

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ صفحه با سه نقطهٔ غیر واقع بر یك استقامت مشخص می‌شود ، یا بایك خط ویك نقطه درخارج‌آن، یا با دوخط متقاطع یا با دوخط متوازی .

۲ ـ اگریك تصویر یکی از خطهای صفحه‌ای داده شده‌باشد ، تصویر دیگر آن را به این ترتیب بدست می‌آوریم‌که نقاط تلاقی تصویر معلوم را با تصاویر دوخط از صفحه تعیین می‌کنیم و تصویر دیگر هرنقطه را به‌وسیلهٔ رسم رابط بدست می‌آوریم و دو نقطه‌ای را که به این ترتیب بدست می‌آیند به‌هم وصل می‌کنیم .

۳ ـ اگریك تصویر یك نقطهٔ صفحه داده شده باشد ، خطی برآن می‌گذرانیم وتصویر دیگرخط را معین می‌کنیم وتصویردیگر نقطه را به‌وسیلهٔ رابط بر تصویر این خط مشخص می‌سازیم .

۴ـ خطهای مهم یك‌صفحه عبارتند از : افقیه‌ها ، جبهیه‌ها ، اثر افقی، اثرقائم، فصل مشترکها با نیمساز فرجه‌های اول و دوم، وخطهای بزرگترین شیب نسبت به صفحات تصویر .

۵ ـ آثار صفحه یا با xy موازیند یا یکدیگر را در روی xy قطع می‌کنند .

۶ ـ برای تعیین نقطه‌ای از صفحه به‌بعد و ارتفاع معین، باید جبهیه‌ای به آن بعد و افقیه‌ای به آن ارتفاع رسم کرد تا یکدیگر را قطع‌کنند .

۷ ـ تصویر افقی خط بزرگترین شیب نسبت به صفحهٔ‌افقی، عمود است بر تصویرافقی افقیه‌ها و بر اثر افقی ؛ تصویر قائم آن را باید بدست آورد . تصویر قائم خط بزرگترین شیب نسبت به صفحهٔ قائم، عمود است برتصویرقائم جبهیه‌ها .

۸ ـ اهمیت خط بزرگترین شیب در این است‌که بتنهایی برای مشخص کردن صفحه کافی است .

۹ـ صفحات مهم عبارتند از: الف ـ افقی، که اثرقائمش با xy موازی است و اثر افقی ندارد . ب ـ جبهی ، که اثر افقیش موازی با xy است و اثرقائم ندارد . ج ـ قائم، که اثر قائمش عمود است بر xy . د ـ منتصب، که اثر افقیش‌عموداست بر xy. ه ـ مواجه، که هر دو اثرش با xy موازیند. و ـ نیمرخ ، که آثارش بریك امتداد و عمودند بر xy .

۱۰ ـ تصویر افقی صفحهٔ قائم یا جبهی ، یك خط است که همان اثر افقی آن است ؛ تصاویر افقی همهٔ نقاط صفحه بر روی اثر افقی قرار دارند. تصویرقائم صفحهٔ منتصب یا افقی ، یك خط است که همان اثر قائم آن است.

تمرین

۱ـ آثار صفحه‌ای را که بریك خط و یك نقطه می‌گذرد، دراین حالتها بدست آورید :

الف ـ نقطهٔ غیرمشخص و خط افقی یا جبهی . ب ـ نقطهٔ غیرمشخص و خط قائم یا منتصب . ج ـ نقطهٔ غیر مشخص و خط مواجه یا نیمرخ . د ـ نقطه در صفحهٔ نیمساز دوم و خط منتصب یا قائم . ه ـ نقطه بر خط زمین و خط مواجه . و ـ نقطه برخط زمین و خط نیمرخ .

۲ـ آثار صفحه‌ای را که بر دوخط متقاطع می‌گذرد، در این حالتها بدست آورید :

الف ـ دو خط غیر مشخص . ب ـ یکی افقیه و دیگری جبهیه . ج‌ـ یك افقیه و یك غیرمشخص. د ـ یك افقیه ویك قائم (شرط امکان؟). ه ـ یك جبهیه و یك قائم (شرط امکان؟). و ـ یك مواجه ویك غیرمشخص . ز ـ دو مواجه . ح ـ دوخط‌که یکدیگر را روی xy قطع کرده باشند . ط ـ دوخط که یکی ازآنها تصاویرش برهم منطبق باشند . ی ـ دوخط که تصاویر غیرـ همنامشان برهم منطبق باشند . ك‌ـ یك نیمرخ ویك خط‌غیرمشخص. ل ـ دو نیمرخ . م ـ دو خط که آثارشان خارج حدود شکل باشند . ن ـ هریك از دوخط ، با یك نیمساز فرجه موازی باشد .

۳ـ چهار نقطه داده‌شده‌اند؛ تحقیق‌کنیدکه آیاهرچهار دریك‌صفحه‌اند؟

۴ـ درصفحه‌ای‌که به‌آثارش‌نموده شده است، خطوط زیررا رسم‌کنید: یك افقیه ، یك جبهیه ، یك قائم ، یك منتصب ، یك مواجه ، یك نیمرخ .

تحقیق‌کنیدکه آیا حل این مسئله در تمام حالات وبرای تمام صفحات ممکن است یا نیست؟ اگرنیست، تعیین کنیدکه رسم‌هریك ازخطوط، درمورد چه نوع صفحه‌ای مقدور است .

۵ـ برخط AA' یك‌صفحهٔ قائم، یك صفحهٔ منتصب، یك صفحهٔ‌افقی ، یك صفحهٔ جبهی، یك صفحهٔ مواجه و یك صفحهٔ‌نیمرخ مرور دهید، درحالی که AA' غیر مشخص ، افقیه ، قائم ، منتصب ، یا نیمرخ باشد .

تحقیق‌کنید که مسئله در تمام حالات و برای تمام خطوط ممکن است یانیست. تعیین‌کنیدکه برهریك ازخطوط، چگونه صفحاتی می‌توان‌مرورداد.

۶ـ یك نقطهٔ A به بعد ۲ و ارتفاع ۳ معین کنید . بر آن، صفحهٔ منتصبی بگذرانیدکه با صفحهٔ تصویر زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد و آثارش خط زمین را در طرف راست رابط A قطع کنند . در این صفحه نقطهٔ B را به بعد و ارتفاع ۴ معین کنید و فصل مشترك AB را با صفحات نیمساز فرجه بدست آورید .

۷ـ صفحهٔ مثلثی بر خط زمین می‌گذرد ؛ تصاویر افقی سه رأس آن و تصویرقائم یك رأسش داده شده است ؛ ملخص مثلث را رسم کنید .

۸ـ صفحهٔ مثلثی منتصب است ؛ a' و b' و c' تصاویرقائم سه رأس‌آن و تصویر افقی یکی ازآنها ، مثلاً a ، داده شده‌اند و می‌دانیم‌که تصویر افقی مثلث ، مثلثی متساوی‌الاضلاع است . ملخص آن را رسم‌کنید .

راهنمایی ـ از a عمودی بررابط یك رأس دیگر ، مثلاً B ، فرود آورید تا آن را در I قطع کند ، $aH = aI$ را چنان بسازید که با aI زاویهٔ $۶۰°$ بسازد؛ از H عمودی بر Ha اخراج‌کنید تا رابط رأس C را در c قطع‌کند؛ $Ib=Hc$ رابر رابط B جدا کنید؛ abc مثلث‌متساوی‌الاضلاع مطلوب است .

۹ـ صفحهٔ مثلث ABC جبهی است؛ a و b و c تصاویر افقی سه رأس و تصویر قائم یك رأس ، مثلاً a' ، در دست است ؛ می‌دانیم که تصویر قائم مثلث، مثلثی است متساوی‌الساقین‌که رأسش a' و زاویهٔ رأسش ۴۵ درجه‌است؛ تصویر قائم ABC را بسازید .

۱۰ ـ تصاویر افقی رئوس یك پنج‌ضلعی مستوی و تصویر قائم سه رأس آن داده شده‌اند ؛ ملخص پنج‌ضلعی را بسازید .

۱۱ ـ بر خط مفروض، صفحه‌ای بگذرانید که مجموع زوایای هردو اثرش‌باخط زمین، α باشد . مثال عددی: الف ـ $\alpha=۹۰°$ ، ب‌ـ $\alpha=۶۰°$، ج ـ $\alpha=۱۳۵°$.

۱۲ـ برخط مفروض، صفحه‌ای بگذارنیدکه آثارش نسبت به خط زمین متقارن باشند .

۱۳ـ برخط‌مفروض، صفحه‌ای مرور دهیدکه‌آثارش برهم‌منطبق‌باشند.

۱۴ـ در صفحهٔ مار بر دو خط متقاطع مفروض، جبهیه‌ای رسم‌کنید که

طول حقیقی جزئی از آن‌که بین دوخط مفروض واقع‌می‌شود، مساوی l باشد.

۱۵ـ سه‌نقطهٔ A (۵ و ۳ و ۲) و B (۶ و ۴ و ۲) و G (۶ و ۱ و ۴) دو رأس ومرکز‌ثقل (محل‌تلاقی میانه‌های) مثلثی هستند؛ مثلث را رسم‌کنید .

۱۶ـ دو نقطهٔ M (۵ و ۳ و ۲) و N (۵ و ۱ و ۱) اوساط دوضلع مجاور و O (۲ و ۳ و ۰) مرکز متوازی‌الاضلاعی هستند؛ آن را بسازید .

۱۷ـ بعد دونقطهٔ A و B برابر ۵ و فاصلهٔ حقیقی آنها l و ارتفاع A مساوی ۵ است ؛ به‌فرض اینکه موضع a' و b معلوم باشند ، a و b' را بدست آورید .

۱۸ـ نقطهٔ M (۵ و ۰ و ۲) ونقطهٔ N (۰ و ۳ و ۱ —) داده شده‌اند. بر خط MN صفحه‌ای بگذرانیدکه آثارش خط زمین را در α قطع کند و طول $\alpha m'$ دو برابر طول αn باشد .

۱۹ـ نقطهٔ A (۳و۲و۰) یك‌رأس متوازی‌الاضلاعی‌است‌با اینمشخصات: صفحهٔ متوازی‌الاضلاع، قائم است و با صفحهٔ تصویر زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد و خط زمین را طرف چپ رابط aa' قطع می‌کند؛ ضلع AB افقیه است و طول $AB=۳$ و A طرف راست B است ؛ ارتفاع مرکزمتوازی ـ الاضلاع مساوی ۴ و بعد رأس C مساوی۱ است ؛ متوازی‌الاضلاع‌را بسازید.

۲۰ـ تصویر قائم متوازی‌الاضلاعی مربع است و تصاویر افقی سه رأس و تصویرقائم یك رأس آن داده شده‌اند ؛ ملخص آن را رسم‌کنید .

راهنمایی ـ از تمرین ۸ استفاده شود .

فصل چهارم

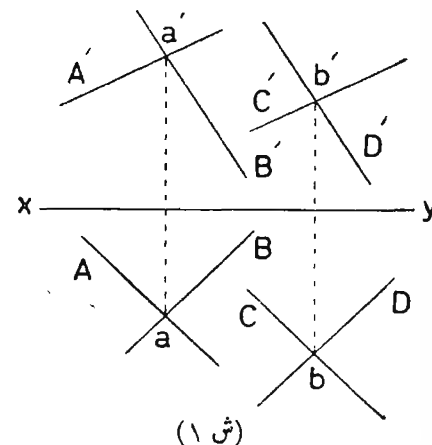
اوضاع مختلف خط و صفحه

۱ ـ اوضاع مختلف دوصفحه

۱ـ دو صفحه ممکن است متوازی یا متقاطع باشند .

۲ـ شرط توازی دو صفحه این است که دو خط متقاطع یکی با دو خط متقاطع دیگری موازی باشند . در شکل ۱ ، صفحه‌ای که بر دو خط AA' و BB' می‌گذرد، باصفحه‌ای که بر دو خط CC' و DD' مرور می‌کند، موازی است .

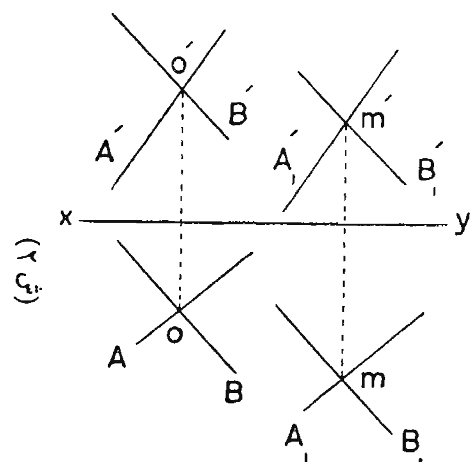
۳ـ می‌دانیم که فصل مشترکهای یك صفحه با دوصفحهٔ متوازی ، دو خط متوازیند ؛ بنا بر این ، آثار افقی دوصفحهٔ متوازی ، متوازیند و همچنین‌است آثارقائمشان؛ و نیز افقیه‌های دوصفحهٔ‌متوازی باهم و جبهیه‌های آنها نیز باهم موازیند. پس دوصفحه (غیرمواجه) که با آثارشان نموده شده باشند ، وقتی متوازیندکه آثار همنامشان متوازی باشند .



(ش ۱)

۴ ـ از نقطهٔ mm' صفحه‌ای به موازات صفحهٔ مفروضی رسم کنید .

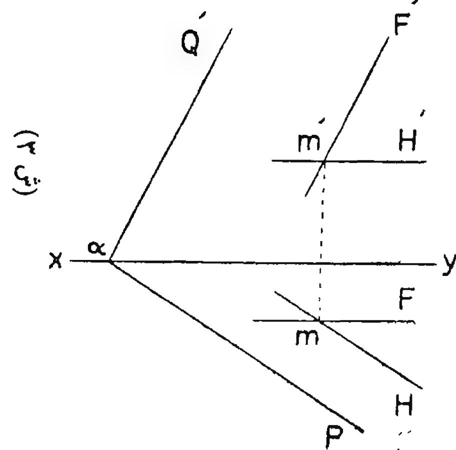
اگر صفحهٔ مفروض به وسیلهٔ دو خط متقاطع نموده شده باشد ، از mm' دو خط به موازات آنها رسم می‌کنیم ؛ دو خط اخیر ، صفحهٔ مطلوب را مشخص می‌سازند (شکل ۲) .



(ش ۲)

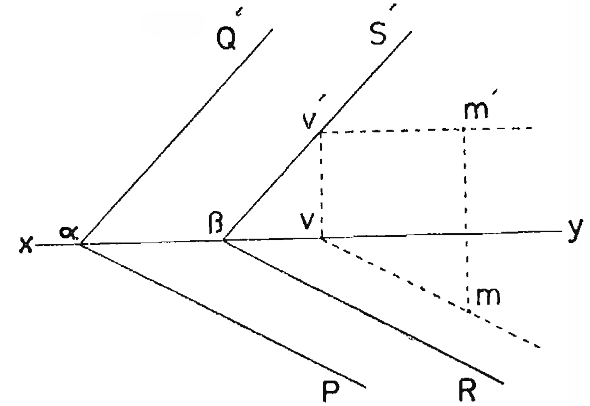
هرگاه صفحه به وسیلهٔ آثارش مشخص باشد ، از نقطهٔ mm' افقیه وجبهیه‌ای بترتیب موازی با اثر افقی و اثر قائم‌آن رسم می‌کنیم، صفحهٔ $FHF'H'$ صفحهٔ مطلوب است (شکل ۳) .

ولی ممکن است که به جای رسم دو خط افقی و جبهی فقط یکی از آنها را رسم‌کرده به‌کمك آن، آثار صفحهٔ مطلوب را بدست آوریم ؛ بدین ترتیب که از mm' افقیه‌ای موازی‌با اثر افقی صفحهٔ مفروض



(ش ۳)

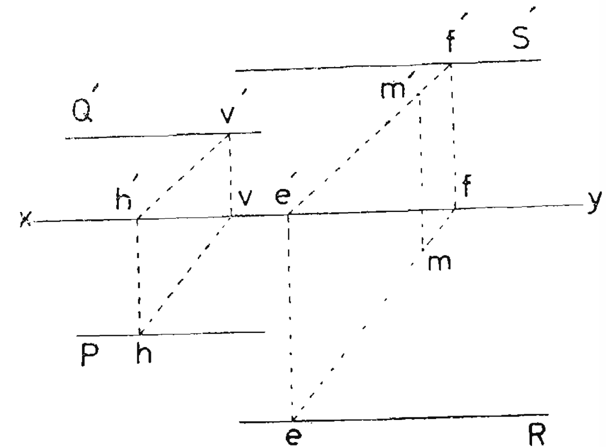
می‌کشیم (شکل۴) و vv' اثر قائم آن را بدست‌می‌آوریم، اثر قائم صفحهٔ مطلوب بر v' می‌گذرد و با $\alpha Q'$ موازی است ؛ آن را رسم کرده $\beta S'$ می‌نامیم و از β خط βR ، اثر افقی صفحهٔ مطلوب ، را موازی با αP می‌کشیم .



(ش ۴)

۵ـ تبصره ـ به جای استفاده از افقیه یا جبهیهٔ صفحهٔ مطلوب ، ممکن است از یك خط غیر مشخص آن استفاده کنیم .

بدین‌معنی که در صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ خط‌غیرمشخصی رسم‌کنیم و از mm' خطی به‌موازات آن‌کشیده‌آثار این‌خط را بیابیم‌و از این‌آثار، دو اثرصفحهٔ مطلوب راموازی با آثار صفحهٔ‌مفروض‌رسم کنیم. این‌طریقه، بخصوص، در رسم صفحهٔ موازی با صفحهٔ‌مواجه بکار می‌رود(شکل۵). توضیح آنکه‌اگر



(ش ۵)

بخواهیم از mm' صفحه‌ای موازی با صفحهٔ مواجه PQ' رسم کنیم ، نخست در صفحهٔ PQ' خط دلخواهی مانند $hvh'v'$ رسم می‌کنیم ؛ آنگاه از mm' خطی موازی با آن می‌کشیم و ee' و ff' آثار افقی و قائمش را بدست می‌آوریم؛ آثار صفحهٔ مطلوب، بر این نقاط می‌گذرند و با خط زمین موازیند .

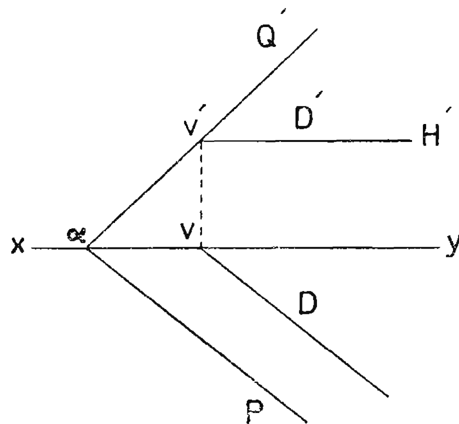
تمرین ـ ازنقطهٔ‌مفروض، صفحه‌ای به‌موازات صفحات زیررسم‌کنید: الف ـ صفحهٔ افقی. ب ـ صفحهٔ جبهی . ج ـ صفحهٔ قائم. د ـ صفحهٔ‌منتصب. ه ـ صفحهٔ نیمرخ .

۶ـ صفحات متقاطع ـ دوصفحهٔ غیر موازی ، یکدیگر را قطع می‌کنند و فصل مشترك آنها خطی است مستقیم .

I ـ حالتهای خاص

الف ـ فصل مشترك یك‌صفحه با صفحات تصویر عبارت‌است از آثار افقی و قائم آن .

ب ـ فصل مشترك یك صفحهٔ افقی با یك صفحهٔ غیرمشخص ـ هرگاه بخواهیم فصل مشترك صفحهٔ افقی H' با صفحهٔ $P\alpha Q'$ (شکل۶) را بدست آوریم ، کافی‌است که توجه‌کنیم که چون فصل مشترك در صفحهٔ افقی H' است ، خطی است افقی که تصویر قائمش ، D' ، بر H' منطبق‌است؛ پس‌فصل‌مشترك، افقیه‌ای‌است‌ازصفحهٔ $P\alpha Q'$ که تصویر قائمش در دست



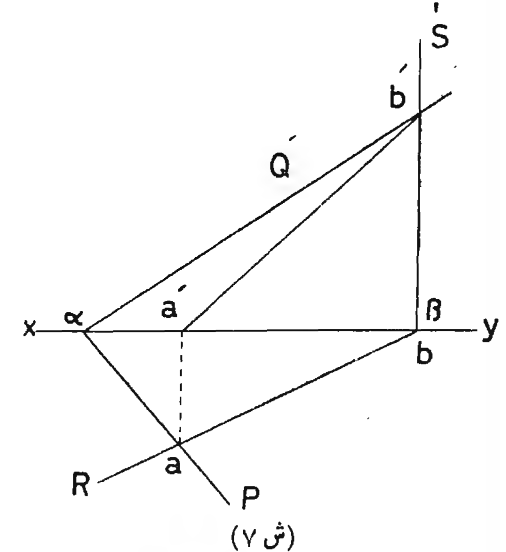
(ش ۶)

است و تصویر افقیش بآسانی تعیین می‌شود (شکل ۶) ، به این ترتیب که D' اثرقائم صفحه را در v' قطع می‌کند ؛ تصویر افقی، v ، را روی xy بدست آورده از v خط D را موازی با اثر افقی رسم می‌کنیم .

تمرین ــ فصل مشترك يك صفحهٔ جبهی را با يك صفحهٔ غیر مشخص بدست آورید .

ج ــ فصل مشترك يك صفحهٔ قائم بايك صفحهٔ غیرمشخص ــ این حالت شبیه به‌حالت **ب** است ؛ زیرا که چون فصل مشترك در صفحهٔ قائم است ، تصویرافقیش بر اثر افقی صفحهٔ قائم واقع می‌شود ؛ بنا بر این ، تصویر افقی خطی از صفحهٔ $P\alpha Q'$ را داریم و تصویر قائم آن را پیدا می‌کنیم (شکل ۷ ، $aba'b'$) .

تمرین ــ فصل مشترك صفحهٔ منتصبی را با صفحهٔ غیر مشخص بدست آورید .



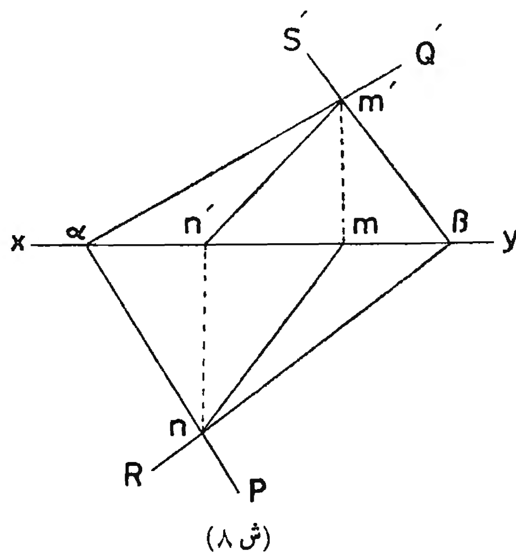
(ش ۷)

II ــ حالت عمومی

از دو صفحهٔ کمکی برای بدست آوردن فصل مشترك استفاده می‌کنیم. صفحات کمکی که در هندسهٔ ترسیمی اختیار می‌کنیم، یا صفحات افقی و قائم تصویر هستند یا صفحات افقی و جبهی ؛ گاهی هم از صفحات قائم و منتصب ، و بندرت از صفحات نیمرخ ، استفاده می‌شود . اینك چند مثال :

مثال ۱ ــ مطلوب است فصل مشترك دو صفحهٔ غیر مشخص $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$.

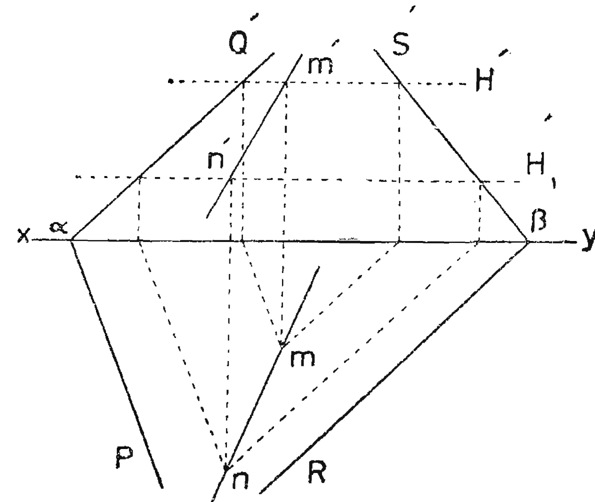
الف ــ وقتی که آثارهمنام دوصفحه درحدودشکل متقاطعند (شکل ۸)، صفحهٔ افقی تصویر را یکی ازصفحات کمکی اختیارمی‌کنیم؛ این صفحهٔ کمکی ، صفحهٔ $P\alpha Q'$ را در امتداد αP و صفحهٔ $R\beta S'$ را در امتداد βR قطع می‌کند ونقطهٔ تلاقی αP و βR یعنی nn' يك‌نقطه از فصل مشترك مطلوب است . صفحهٔ‌قائم‌تصویر، که صفحهٔ دوم کمکی اختیار می‌شود، صفحات مفروض را بر فصل مشترکهای $\alpha Q'$ و $\beta S'$ قطع می‌کند و این دوخط یکدیگر را در mm' تلاقی می‌کنند ؛ $mnm'n'$ فصل مشترك دو صفحهٔ مفروض است .



(ش ۸)

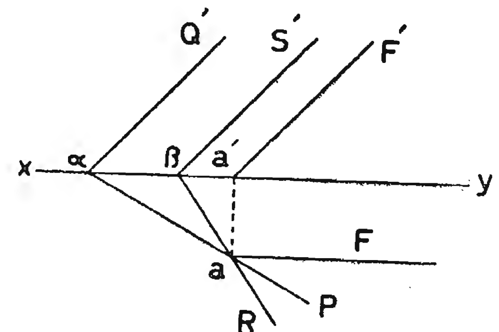
ب ــ وقتی که آثار همنام دو صفحه در خارج حدود شکل متقاطع باشند (شکل ۹) ، استفاده از صفحات تصویر به عنوان صفحات کمکی مقدور نیست . در این صورت يك صفحهٔ افقی ، مانند H' را کمکی اختیار می‌کنیم و فصل مشترکهای آن را با $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ بدست می‌آوریم ؛ این دوفصل مشترك یکدیگررا در mm' ، که يك نقطه از

فصل مشترك دوصفحهٔ مفروض است، قطع می‌کنند ؛ يك نقطهٔ دیگر nn' به‌وسیلهٔ صفحهٔ کمکی دیگری، که‌آن هم افقی یاجبهی اختیارمی‌شود، بدست می‌آید ؛ $mnm'n'$ فصل مشترك دو صفحهٔ مفروض است .



(ش ۹)

ج ـ وقتی که آثار قائم دو صفحه متوازیند ، فصل مشترك آنهاموازی است با آثارمذکور(زیراکه هرگاه سه‌صفحه دوبدو یکدیگر را قطع کنند و دوتا از فصل مشترکهای آنها متوازی باشند، سومی هم با آنهاموازی‌است)؛ پس برای رسم فصل‌مشترك‌مطلوب، داشتن يك نقطهٔ‌آن کافی است ؛ این نقطه از تلاقی آثار افقی آنها بدست می‌آید (شکل ۱۰) ؛ آن را aa' می‌نامیم‌وازآن ، جبههٔ FF' راموازی با آثار قائم صفحات

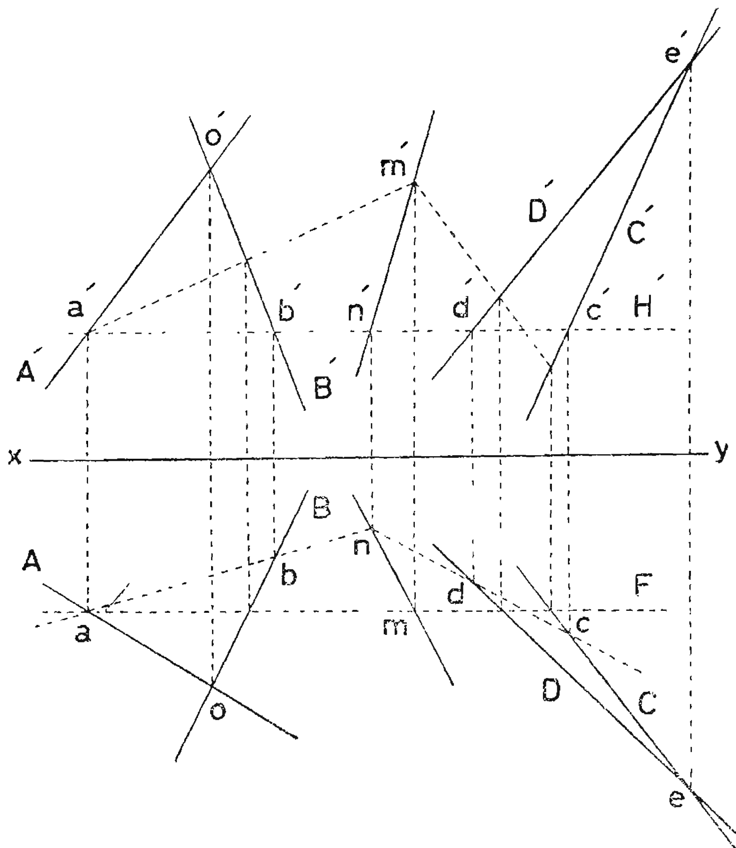


(ش ۱۰)

مفروض رسم می‌کنیم ؛ این جبهیه فصل مشترك مطلوب است .

مثال ۲ ـ مطلوب است فصل مشترك دو صفحه‌که به وسیلهٔ خطوط متقاطع نموده شده‌اند (شکل ۱۱) .

در این حالت، صفحات‌کمکی، افقی یا جبهی اختیار می‌شوند. در



(ش ۱۱)

شکل ۱۱، صفحهٔ افقی H' را کمکی اختیار کرده $aba'b'$ ، فصل مشترك آن را با صفحهٔ $ABA'B'$، و $cdc'd'$ ، فصل مشترك آن را با صفحهٔ

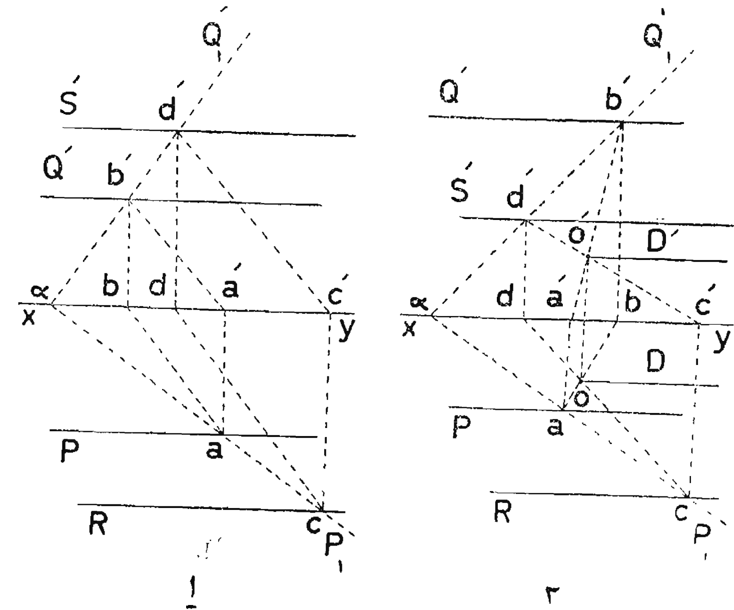
CDC'D' ، تعیین کرده‌ایم ؛ این دو خط یکدیگر را در nn' قطع کرده‌اند ؛ صفحهٔ کمکی جبهی F نیز نقطهٔ mm' را بدست می‌دهد ؛ mnm'n' فصل مشترك دو صفحه است .

تمرین — فصل مشترك این صفحات را بدست آورید : الف — یك صفحهٔ افقی و یك صفحهٔ جبهی . ب — صفحهٔ افقی (یا جبهی) و یك صفحهٔ مواجه . ج — یك صفحهٔ افقی یاجبهی و یك صفحهٔ نیمرخ. د — صفحهٔ نیمرخ و یك صفحهٔ غیر مشخص . ه — یك صفحهٔ نیمرخ و یك صفحهٔ مواجه .

مثال ۳ — دوصفحهٔ مواجه PQ' وRS' داده شده‌اند؛ تحقیق کنیدکه متوازیند یا متقاطع .

اگر دو صفحهٔ مواجه یکدیگر را قطع کنند ، فصل مشترکشان خطی است مواجه ؛ پس برای رسم آن ، یك نقطه کافی است و فقط به یك صفحهٔ کمکی احتیاج داریم .

بنا بر این، صفحهٔکمکی $P_1\alpha Q'_1$ (شکل ۱۲) را مرور داده فصل



(ش ۱۲)

مشترکهای آن را با صفحات مواجه PQ' و RS' بدست آورده بترتیب aba'b' و cdc'd' می‌نامیم ؛ اگر aba'b' و cdc'd' متوازی شوند (شکل ۱۲–۱) ، دو صفحهٔ مواجه متوازیند ؛ اگر aba'b' و cdc'd' متوازی نشوند و یکدیگر را در نقطهٔ oo' (شکل ۱۲–۲) قطع کنند ، دوصفحهٔ مفروض، متقاطعند و فصل مشترکشان خط مواجه DD' است‌که از oo' می‌گذرد .

تمرین ۱— در وضع دو صفحهٔ مواجه به‌کمك یك صفحهٔ نیمرخ تحقیق کنید .

تمرین ۲— فصل مشترك دو صفحهٔ P و P' را در حالتهای زیر بدست آورید :

الف — P به وسیلهٔ آثارش و P' به وسیلهٔ یك خط بزرگترین شیب مشخص است. ب — P به وسیلهٔ دو خط متقاطع و P' به وسیلهٔ خط بزرگترین شیب نسبت به‌صفحهٔ قائم معین گردیده است . ج — P غیر مشخص و P' یکی از صفحات نیمساز فرجه است. د — P به وسیلهٔ سه نقطه و P' به وسیلهٔ خط زمین ویك نقطه معین است . ه — P قائم (یامنتصب) و P' یکی ازنیمسازها است. و — P و P' به وسیلهٔ آثارشان مشخصند و آثار غیر همنامشان بر هم منطبقند .

۲ـ اوضاع مختلف خط و صفحه

۷ — خط ممکن است در صفحه باشد ، یا با آن موازی باشد ، یا آن را قطع کند .

شرط آنکه خطی در صفحه‌ای باشد این است که دو نقطه‌اش

در آن صفحه باشند .

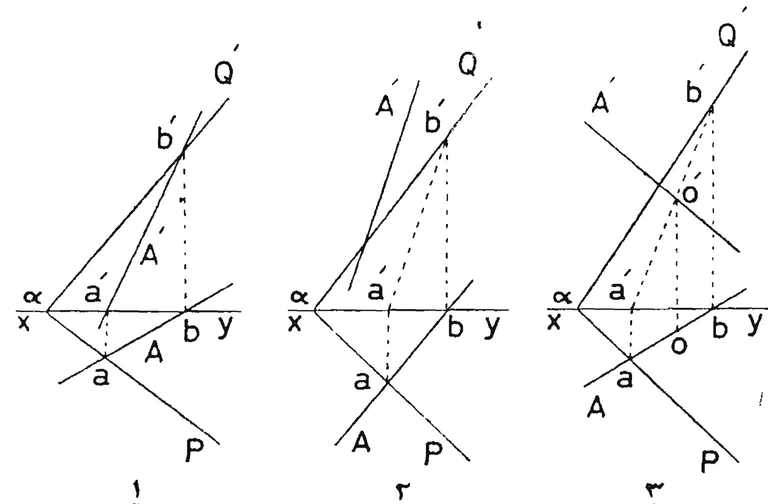
شرط آنکه خطی با صفحه‌ای موازی باشد این است که با یکی از خطوط آن صفحه موازی باشد .

اگر خطی نه در صفحه و نه با آن موازی باشد ، آن را قطع می‌کند .

۸ ـ مسئله ـ وضع خط AA' را نسبت به صفحهٔ $P\alpha Q'$ تحقیق کنید .

از A' ، تصویر قائم ، بطور موقت صرف نظر کرده A را تصویر افقی خطی از صفحهٔ $P\alpha Q'$ (شکل ۱۳) فرض می‌کنیم و $a'b'$ تصویر قائم آن را بدست می‌آوریم ؛ سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

حالت اول ، $a'b'$ بر A' منطبق شود (شکل ۱۳ـ۱) ؛ در این صورت ، خط AA' در صفحهٔ مفروض است .



(ش ۱۳)

حالت دوم ، $a'b'$ با A' موازی شود (شکل ۱۳ ـ ۲) ؛ در این صورت، خط AA' با خط $aba'b'$ ازصفحهٔ $P\alpha Q'$ موازی است، یعنی با آن صفحه موازی است .

حالت سوم ، $a'b'$ خط A' را قطع می‌کند ؛ در این صورت ، خط AA' صفحه را قطع می‌کند (شکل ۱۳ـ۳) و oo' محل تلاقی آن با صفحه است .

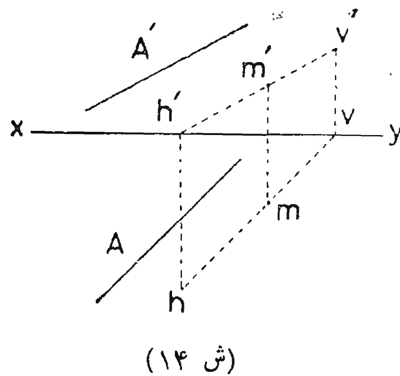
تمرین ۱ـ ازنقطهٔ aa' خطی به موازات صفحهٔ $P\alpha Q'$ مرور دهید. مسئله چند جواب دارد ؛ مکان هندسی آن چیست ؟ این مکان را رسم‌کنید.

تمرین۲ـ ازنقطهٔ مفروضی خطی به موازات صفحهٔ مفروض رسم‌کنید بقسمی‌که تصویرافقیش باخط زمین زاویهٔ φ بسازد . مسئله چند جواب‌دارد؟

تمرین ۳ـ ازنقطهٔ aa' خطی رسم‌کنیدکه باصفحات $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ موازی باشد .

۹ـ مسئله ـ از نقطهٔ mm' صفحه‌ای به موازات خط AA' بگذرانید .

از mm' خطی موازی با AA' رسم می‌کنیم (شکل ۱۴) و vv' و hh' آثار قائم و افقی آن را بدست می‌آوریم؛ هرصفحه‌که آثار افقی و قائمش بترتیب بر hh' و vv' بگذرد ، با AA' موازی است . مسئله جوابهای بیشمار دارد .

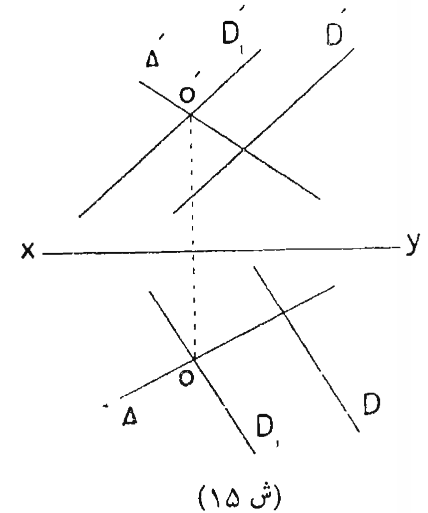


(ش ۱۴)

تمرین ـ از نقطهٔ aa' صفحه‌ای به موازات دو خط BB' و CC' بگذرانید .

۱۰- مسئله - برخط $\Delta\Delta'$ صفحه‌ای موازی با خط DD' مرور دهید .

از یك نقطهٔ oo' واقع برخط $\Delta\Delta'$ ، خط $D_1D'_1$ راموازی‌با DD' رسم می‌کنیم ؛ صفحه‌ای که بر $D_1D'_1$ و $\Delta\Delta'$ بگذرد ، جواب مسئله است (شکل ۱۵) .



(ش ۱۵)

تمرین - الف - بر نقطهٔ aa' یك خط افقی موازی با صفحهٔ قائم مفروض بگذرانید . ب - بر نقطهٔ مفروض، صفحهٔ قائمی (یا منتصبی) موازی‌با خط مفروض مرور دهید . ج- بر نقطهٔ‌مفروض، صفحه‌ای‌موازی با نیمساز فرجهٔ‌اول‌یا دوم‌مرور دهید.

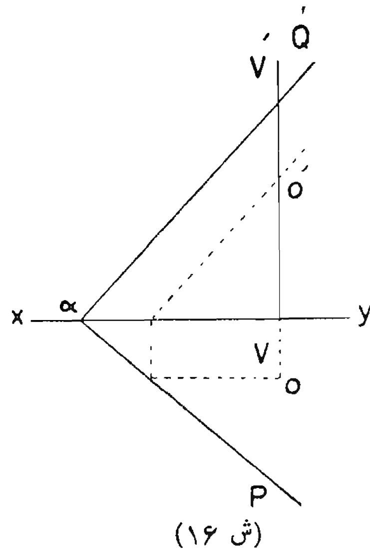
فصل مشترك خط و صفحه

۱۱- حالتهای خاص

الف - فصل مشترك خط قائم VV' باصفحهٔ $P\alpha Q'$ رابدست آورید (شکل ۱۶) .

چون نقطهٔ تقاطع، بر روی خط قائم VV' است، تصویر افقیش بر V واقع می‌شود و چون نقطهٔ مذکور در صفحهٔ $P\alpha Q'$ نیز هست ، مسئله

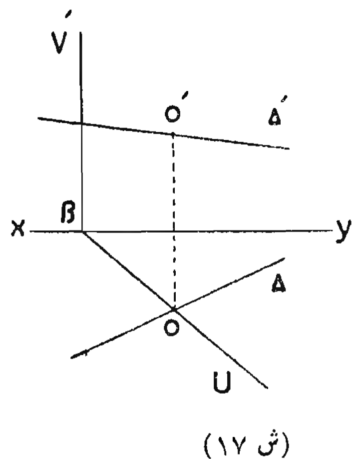
منجرمی‌شود به اینکه تصویر افقی یك نقطه از صفحه‌ای داده شده است و بخواهیم تصویرقائم‌آن‌را بدست‌آوریم؛ این‌عمل درشکل ۱۶ به‌کمك یك خط جبهی انجام داده شده است ؛ oo' نقطهٔ تقاطع مطلوب است .



(ش ۱۶)

تمرین - نقطهٔ تقاطع یك خط منتصب را بایك صفحه بدست آورید .

ب - فصل مشترك خط غیر مشخص با صفحهٔ قائم (شکل ۱۷) . چون فصل مشترك، ازیك طرف روی صفحهٔ قائم است ، تصویرافقی آن بر روی βU ، اثر افقی صفحه ، واقع می‌شود و از طرف دیگر بر Δ قراردارد ؛ پس o ، نقطهٔ تلاقی Δ و βU ، تصویر افقی فصل‌مشترك است؛ o' تصویر قائمش را به‌وسیلهٔ رابط روی Δ' بدست می‌آوریم .

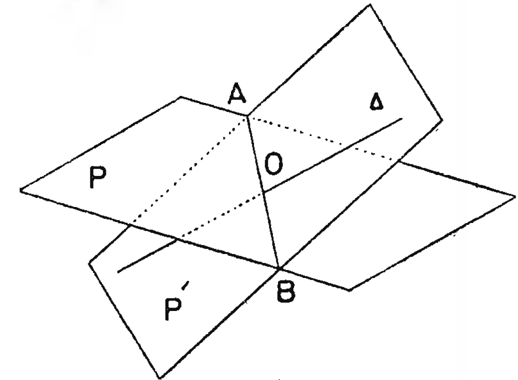


(ش ۱۷)

تمرین - فصل مشترك یك خط غیر مشخص را با صفحات زیر بدست‌آورید : الف - صفحهٔ منتصب. ب- صفحهٔ افقی یا جبهی. ج- صفحهٔ نیمرخ .

۱۲- حالت‌عمومی - در حالت‌کلی، برای‌آنکه فصل مشترك‌خط

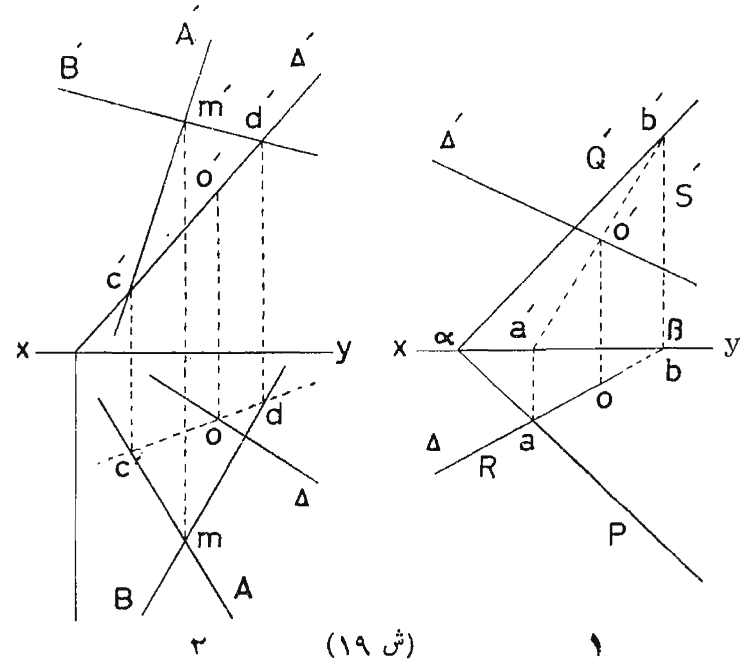
Δ را با صفحهٔ P بدست آوریم (شکل ۱۸) ، بر Δ یك صفحهٔ دلخواه مانند P' می‌گذرانیم تا صفحهٔ P را در امتداد AB قطع کند ؛ AB و Δ که در صفحهٔ P' هستند ، یکدیگر را در O تلاقی می‌کنند ؛ O فصل مشترك خط Δ و صفحهٔ P است .



(ش ۱۸)

در هندسهٔ ترسیمی نیز بر خط ، یك صفحهٔ کمکی می‌گذرانیم ؛ این صفحه را معمولا قائم یا منتصب اختیار می‌کنیم که هم بتوان بسهولت آثارآن را کشید و هم فصل مشترکش باصفحهٔ مفروض سریعتر بدست آید.

الف ـ فصل مشترك $\Delta\Delta'$ با صفحهٔ $P\alpha Q'$ (شکل ۱۹ـ۱) . بر



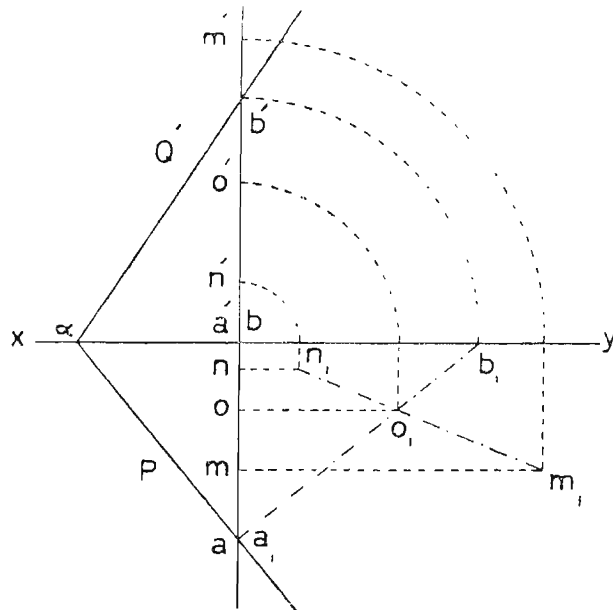
(ش ۱۹)

$\Delta\Delta'$ صفحهٔ قائم $R\beta S'$ را می‌گذرانیم؛ بطوری‌که می‌دانیم اثر افقی صفحه بر Δ منطبق و اثر قائم‌آن برخط زمین عمود است؛ فصل‌مشترك دوصفحه، خط $aba'b'$ است . $a'b'$ با Δ' ، تصویر قائم خط مفروض، در نقطهٔ o' تلاقی‌می‌کند ؛ oo' فصل مشترك $\Delta\Delta'$ و صفحهٔ $P\alpha Q'$ است .

ب ـ فصل مشترك خط $\Delta\Delta'$ باصفحهٔ $ABA'B'$ (شکل۱۹ـ۲).

بر $\Delta\Delta'$ یك صفحهٔ منتصب می‌گذرانیم ؛ خط AA' این صفحه را در cc' و خط BB' آن را در dd' قطع می‌کند ؛ cd تصویر افقی فصل مشترك صفحهٔ مفروض باصفحهٔ منتصبی است که بر $\Delta\Delta'$ گذشته است و تصویر افقی Δ را در o قطع می‌کند؛ oo' فصل مشترك $\Delta\Delta'$ است با صفحهٔ مفروض .

ج ـ فصل مشترك نیمرخ $mnm'n'$ با صفحهٔ $P\alpha Q'$ (شکل ۲۰) . بر نیمرخ $mnm'n'$ یك صفحهٔ نیمرخ مرور می‌دهیم و



(ش ۲۰)

$aba'b'$ فصل مشترکش با صفحهٔ $P\alpha Q'$ را پیدا می‌کنیم ؛ آنگاه صفحهٔ نیمرخ‌را تسطیح می‌کنیم ؛ m_1n_1 و a_1b_1 ، تسطیحهای دوخط مذکور، یکدیگر را در o_1 قطع می‌کنند ؛ o_1 را در oo' ترفیع می‌کنیم .

۱۳ ـ مسئله ـ دو خط Δ و D و نقطهٔ M داده شده اند ؛ بر M خطی بگذرانید که آن دوخط را قطع کند .

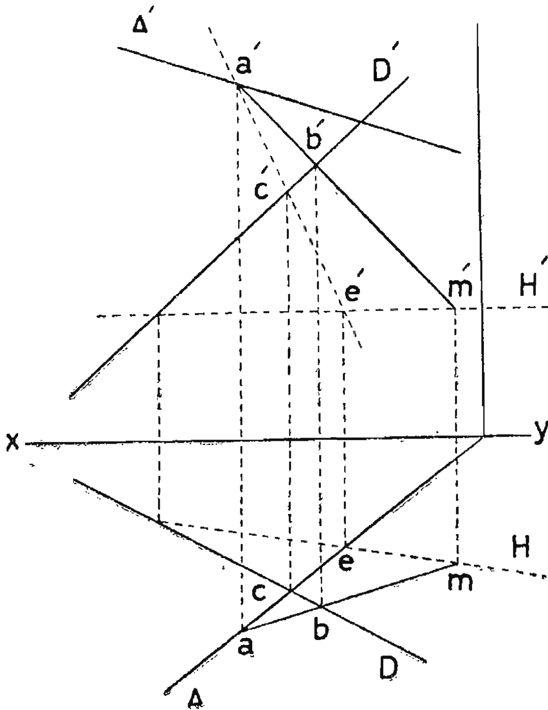
بر یکی از دو خط، مثلاً D ، و نقطهٔ M صفحه‌ای مرور می‌دهیم تا Δ را در A قطع‌کند ؛ AM که با خط D دریك صفحه است، آن را در B تلاقی‌می‌کند و AB خط مطلوب است (شکل ۲۱) .

هرگاه Δ و D متنافر باشند، مسئله یك جواب دارد . هرگاه Δ و D متقاطع یا متوازی باشند ، اگر M در صفحهٔ آنها باشد ، عدهٔ جوابها بیشمار است، یعنی هرخطی‌که‌درآن صفحه بر M بگذرد، جواب مسئله است و اگر M در صفحهٔ آنها نباشد ، مسئله یك جواب دارد . وقتی که Δ و D موازی باشند و M در صفحهٔ آنها نباشد ، خط مطلوب با آنها موازی است .

(ش ۲۱)

ملخص ـ در صفحه‌ای که برنقطهٔ mm' و خط DD' بگذرد، افقیهٔ HH' را که بر mm' می‌گذرد، رسم می‌کنیم؛ بر $\Delta\Delta'$ صفحهٔ قائمی

مرور می دهیم که خط DD' را در cc' و HH' را در ee' قطع کند؛ $cec'e'$ فصل مشترك صفحهٔ $mDm'D'$ با صفحهٔ قائم مار بر $\Delta\Delta'$ است ؛ $c'e'$ با Δ' در نقطهٔ a' تلاقی می‌کند ؛ a را روی Δ بدست می‌آوریم ؛ خط $ama'm'$ جواب مسئله است و DD' را در bb' قطع می‌کند(شکل۲۲).



(ش ۲۲)

تمرین ۱ـ خطی مرور دهید که بر نقطهٔ‌مفروضی بگذرد و خط زمین و نیمرخ مفروضی‌را قطع‌کند.

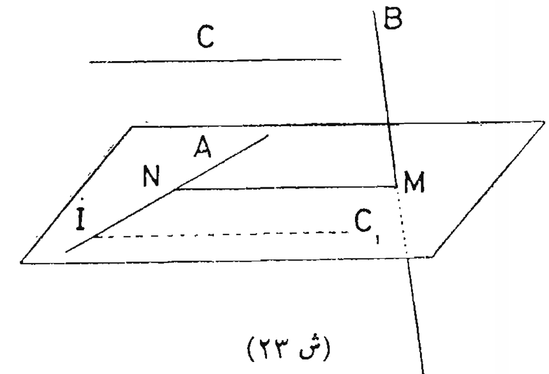
تمرین ۲ـ سه‌خط متنافر D_1 و D_2 و D_3 داده شده‌اند ؛ خطی چنان رسم کنید که هرسه را قطع کند و به‌وسیلهٔ نقاط تقاطع به دوجزء متساوی تقسیم شود .

راهنمایی ـ خط دلخواهی رسم‌کنیدکه بین D_1 و D_2 محدود شود؛ از وسط‌این‌قطعه، صفحه‌ای موازی‌با D_1 و D_2 بکشید تا D_3 را در M قطع‌کند؛ آنگاه از مسئلهٔ شمارهٔ ۱۳ استفاده‌کنید .

تمرین ۳ـ سه خط متنافر و نقطهٔ A داده شده‌اند ؛ متوازی الاضلاع $ABCD$ را چنان بسازیدکه A یك رأس آن باشد و دو رأس مقابل B و D بر دو خط از خطوط مفروض و مرکز آن بر خط سوم واقع باشد .

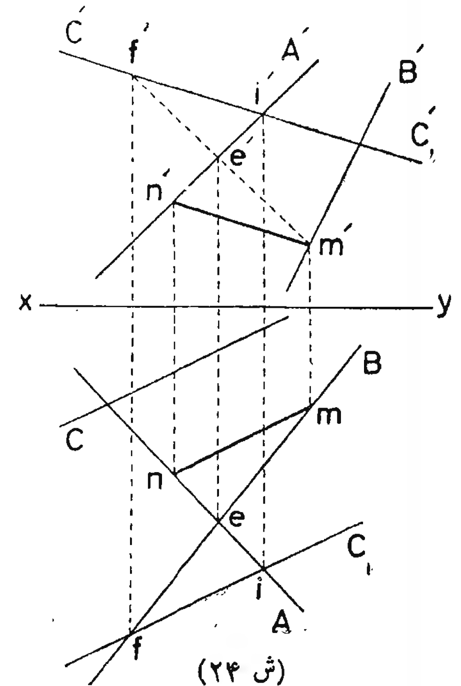
۱۴ـ مسئله ـ سه خط متنافر A و B و C مفروضند؛ خطی موازی با C رسم کنید که A و B را قطع کند.

بر A صفحه‌ای به موازات C مرور می‌دهیم؛ به این ترتیب که از یك نقطهٔ A مانند I خط C_1 را موازی با C رسم می‌کنیم و بر A و C_1 صفحه‌ای می‌گذرانیم؛ این صفحه خط B را در M قطع می‌کند؛ از M خط MN را موازی با C می‌کشیم تا A را در N قطع کند؛ MN خط مطلوب است (شکل ۲۳).



(ش ۲۳)

ملخص ـ سه خط AA' و BB' و CC' مفروضند (شکل ۲۴). از نقطهٔ ii' واقع بر خط AA' خط $C_1C'_1$ را موازی با CC' رسم می‌کنیم (برای صرفه جویی در رسم خط، i' را در محل تلاقی C' و A' اختیار می‌کنیم تا C'_1 بر C' منطبق شود)؛ بر خط BB' صفحهٔ قائمی مرور می‌دهیم (در شکل از اثر قائم این صفحه که مورد استفاده واقع نمی‌شود، صرف نظر شده

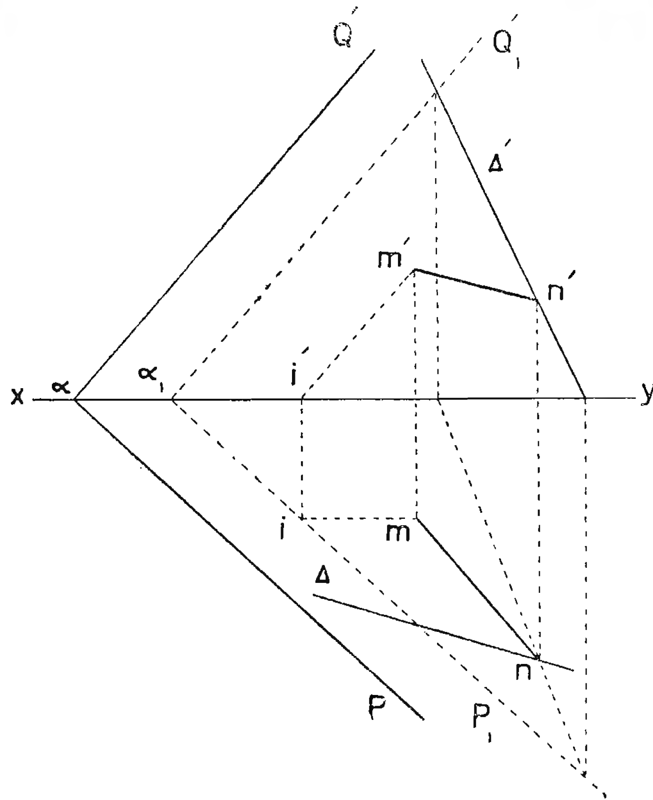


(ش ۲۴)

است)؛ این صفحهٔ قائم، خط AA' را در ee' و خط $C_1C'_1$ را در ff' قطع می‌کند؛ $e'f'$ با خط B' در m' تلاقی می‌کند و m را روی خط B بدست می‌آوریم؛ از mm' خط $mnm'n'$ را موازی با CC' می‌کشیم تا AA' را در nn' قطع کند.

تمرین ـ مسئلهٔ شمارهٔ ۱۴ را در موقعی که A قائم و B منتصب و C غیر مشخص باشد، رسم کنید.

۱۵ـ مسئله ـ بر نقطهٔ مفروض، خطی مرور دهید که با صفحهٔ



(ش ۲۵)

مفروضی موازی باشد و خط مفروضی را قطع کند .

کافی است که بر آن نقطه صفحه‌ای به موازات صفحهٔ مفروض رسم کرده نقطهٔ تقاطعش با خط مفروض را بدست آوریم ؛ خطی که از نقطهٔ اخیر به نقطهٔ مفروض وصل شود ، جواب مسئله است .

ملخص ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ و نقطهٔ mm' و خط $\Delta\Delta'$ مفروضند (شکل ۲۵) ؛ از mm' جبهیه‌ای موازی با $\alpha Q'$ ، اثرقائم صفحهٔ مفروض ، رسم کرده ii' اثر افقی آن را بدست می‌آوریم ؛ از i خط $\alpha_1 P_1$ را موازی با αP و از α_1 خط $\alpha_1 Q'_1$ راموازی با $\alpha Q'$ می کشیم؛ صفحهٔ $P_1\alpha_1 Q'_1$ بر نقطهٔ mm' گذشته و موازی با $P\alpha Q'$ است .

فصل مشترک آن را با خط $\Delta\Delta'$ بدست آورده nn' نام می‌گذاریم؛ خط $mnm'n'$ جواب مسئله است .

تمرین ۱ـ نقطهٔ مشترک سه صفحهٔ P_1 و P_2 و P_3 را درحالات زیر بدست آورید :

الف ـ P_1 قائم و P_2 منتصب و P_3 افقی . ب ـ P_1 مواجه و P_2 نیمرخ و P_3 غیر مشخص . ج ـ P_1 برخط زمین و یک نقطه می‌گذرد و P_2 وسیلهٔ دوخط متقاطع مشخص است و P_3 مواجه است .

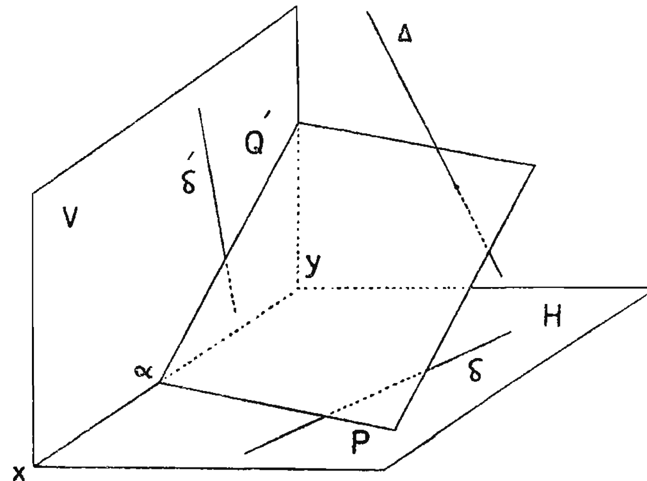
تمرین ۲ـ دوخط متوازی و دو خط متنافر اختیار کنید و خطی رسم کنیدکه هرچهار را قطع‌کند .

تمرین ۳ـ دو صفحه داده شده‌اند ؛ در یکی از آنها نقطه‌ای اختیار کنید و بر آن نقطه خطی مرور دهیدکه درآن صفحه واقع و با صفحهٔ دیگر موازی باشد .

۴ـ خطوط و صفحات عمود برهم

۱۶ ـ قضیه ـ درهندسهٔ ترسیمی هرگاه خطی برصفحه‌ای عمود باشد، تصویر افقیش بر اثرافقی و تصویر افقی افقیه‌های صفحه وتصویرقائمش بر اثرقائم وتصویرقائم جبهیه‌های صفحه عمود می‌شود .

برهان ـ هرگاه Δ بر صفحهٔ $P\alpha Q'$ عمود باشد (شکل ۲۶) ،



(ش ۲۶)

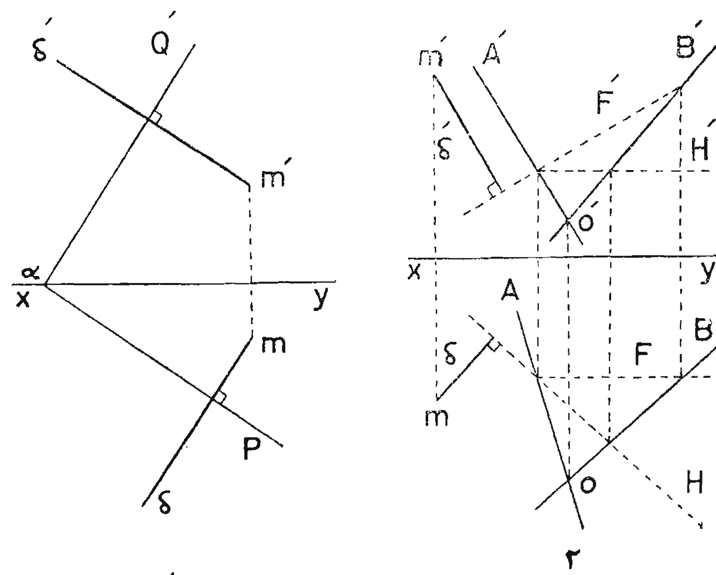
بر اثر افقی آن نیز عمود است و با آن ، زاویهٔ قائمه‌ای می‌سازد که یک ضلعش (اثر افقی) با صفحهٔ افقی موازی است؛ پس تصویر افقی Δ بر اثر افقی صفحه‌عمودمی‌شود؛ چون افقیه های صفحه با اثر افقی‌آن موازیند ، تصویر افقی Δ بر تصویر افقی افقیه ها نیز عمود می‌شود . به دلیل مشابه، تصویر قائم Δ بر اثر قائم صفحه و برتصویر قائم جبهیه های آن ، عمود می‌شود .

۱۷ ـ بعکس هرگاه صفحه‌ای برخطی عمود باشد، اثر افقی وتصویر افقی افقیه‌های آن ، عمود است بر تصویر افقی خط و اثر قائم و تصویر قائم جبهیه‌های آن ، عمود است برتصویر قائم خط .

۱۸ـ مسئله ـ از نقطهٔ M خطی بر صفحهٔ P عمود کنید .

الف ـ هرگاه صفحه با آثارش معین شده باشد ، از m خط δ را بر αP و از m' خط δ' را بر $\alpha Q'$ عمود می‌کنیم (شکل ۲۷ ـ ۱) ؛ $\delta\delta'$ عمود مطلوب است .

ب ـ اگر صفحه به وسیلهٔ دو خط متقاطع AA' و BB' نمایش داده شده باشد (شکل ۲۷ـ۲) ، نخست افقیه‌ای مانند HH' و جبهیه‌ای مانند FF' در صفحه رسم می‌کنیم ، آنگاه از m و m' ، تصاویر افقی وقائم نقطهٔ M ، عمودهای δ و δ' را بترتیب بر H و F' رسم می‌کنیم .



(ش ۲۷)

تمرین ۱ ـ از نقطهٔ مفروضی خطی بر صفحهٔ مفروضی عمود کنید و موقع عمود را بدست آورید .

تمرین ۲ـ خط عمود بر صفحهٔ قائم، چگونه خطی است ؟ بر صفحهٔ منتصب ؟ بر صفحهٔ افقی ؟ بر صفحهٔ جبهی ؟ بر هریك از صفحات چهارگانه خطی عمود کرده و موقع عمود را بدست آورید .

تمرین ۳ ـ از نقطهٔ مفروض،خطی بر صفحهٔ نیمرخ عمودکرده موقع عمود را بدست آورید .

۱۹ـ حالت‌خاص ـ ازنقطهٔ مفروض، خطی برصفحهٔ مواجه عمود کنید .

چون خط عمود برصفحهٔمواجه نیمرخ است، باید یك نقطهٔ دیگر آن را مشخص ساخت .

هرگاه بر M صفحهٔ نیمرخی مرور دهیم تا صفحهٔ مواجه P را بر

V
m
M
B
P
O
y
H
m
A
X

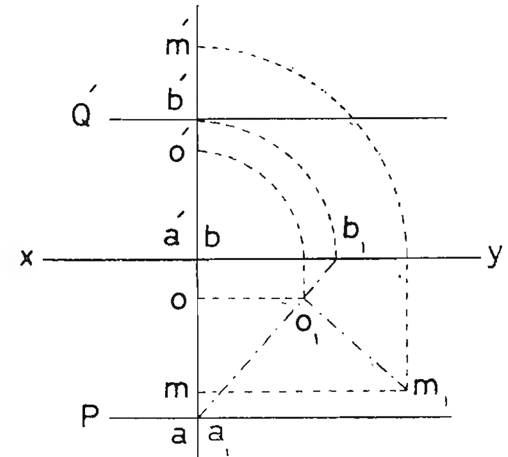
(شکل ۲۸)

فصل مشترك AB قطع کند (شکل ۲۸) و در همان صفحهٔ نیمرخ ، خط

MO را بر AB عمود کنیم ، MO بر صفحهٔ مواجه مفروض عمود است و O موقع آن است .

ملخص ـ صفحهٔ مواجه PQ' و نقطهٔ mm' مفروضند (شکل۲۹) ؛

بر mm' صفحهٔ نیمرخی مرور داده aba'b' فصل مشترك آن را با صفحهٔ PQ' بدست می‌آوریم ؛ سپس aba'b' را در a_1b_1 و نقطهٔ mm' را در m_1 تسطیح کرده عمود m_1o_1 را بر a_1b_1 فرودمی‌آوریم؛



(ش ۲۹)

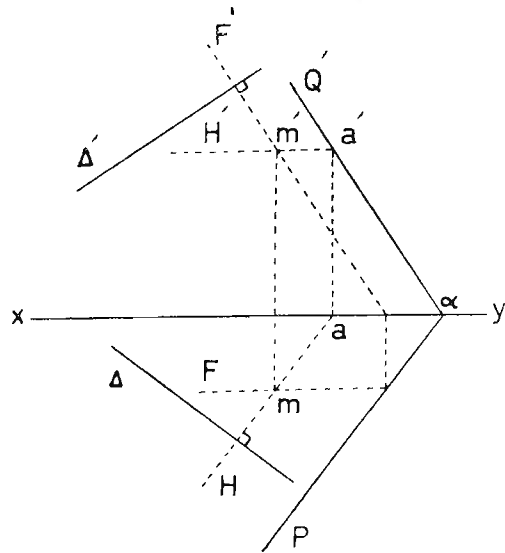
o_1 تسطیح موقع‌عمود است؛ آن‌را در oo' ترفیع‌می‌کنیم؛ خط mom'o' عمود مطلوب است .

۲۰ــ مسئله ــ بر نقطهٔ مفروض mm' صفحه‌ای مرور دهید که بر خط مفروض ΔΔ' عمود باشد .

تصویر افقی افقیه‌های صفحه (و اثر افقی صفحه) بر Δ و تصویر قائم جبهیه‌های صفحه (و اثر قائم صفحه) بر Δ' عمود خواهند بود ؛ پس ممکن است از mm' (شکل۳۰) افقیهٔ HH' را طوری رسم‌کنیم‌که تصویر افقیش بر Δ عمود باشد و نیز جبهیهٔ FF' را طوری بکشیم که تصویر قائمش بر Δ' عمود رسم شود ؛ صفحهٔ FHF'H' صفحهٔ مطلوب است .

ولی راه سهلتر این است که با رسم یك افقیه (یا جبهیه) آثار

صفحه را معین‌کنیم ، به این طریق که پس از رسم‌افقیهٔ HH'،اثر قائمش aa' را بدست آوریم، اثرقائم صفحهٔ مطلوب بر a' می‌گذرد و بر Δ' عمود است ، و xy را در α قطع می‌کند ؛ αP ، اثر افقی صفحه ، از α عمودبر Δ رسم‌می‌شود.



(ش ۳۰)

تمرین ۱ ــ پس از رسم صفحهٔ عمود برخط ΔΔ' ، محل تقاطع خط و صفحهٔ عمود را بدست آورید .

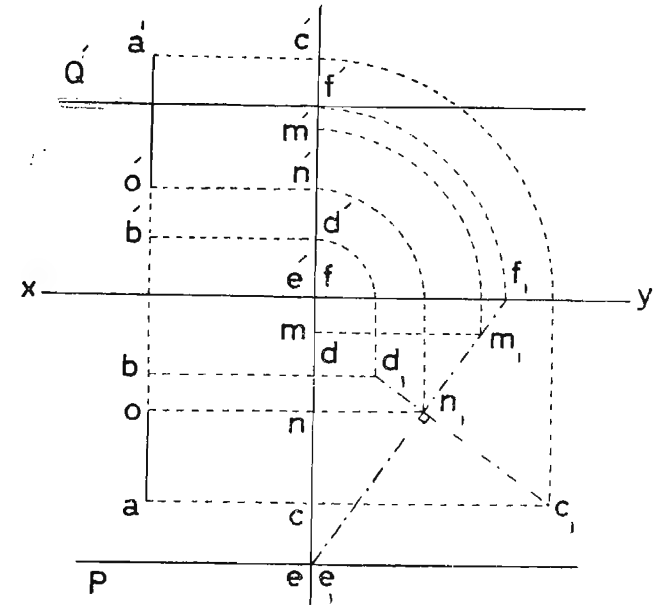
تمرین ۲ ــ از نقطهٔ aa' یك صفحه برخطوط زیر عمود کنید و موقع عمود را بدست آورید: الف ــ افقی . ب ــ جبهی . ج ــ قائم . د ــ منتصب. ه ــ مواجه .

۲۱ ــ حالت خاص ــ از mm' صفحه‌ای بر نیمرخ مفروض aba'b' عمود کنید (شکل ۳۱) .

مسلّم است که صفحهٔ مطلوب، مواجه خواهد بود .

بر mm' صفحهٔ نیمرخی می‌گذرانیم و از aa' و bb' خطوط مواجهی رسم می‌کنیم تا آن را در cc' و dd' قطع کنند ؛ صفحه‌ای که بر mm' بگذرد و بر نیمرخ cdc'd' عمود باشد ، بر aba'b' هم عمود خواهد بود ؛ حال صفحهٔ نیمرخ را تسطیح می‌کنیم و از m_1 ، تسطیح

mm'، عمودی بر c_1d_1، تسطیح cdc'd'، فرود می‌آوریم ؛ این خط تسطیح نیمرخی از صفحهٔ مواجه مطلوب است ؛ e_1 و f_1 تسطیح آثار آن



(ش ۳۱)

را یافته ترفیعشان می‌کنیم و آثار افقی وقائم صفحهٔ مطلوب ، P و Q'، را می‌کشیم .

تمرین ۱ ـ الف ـ بر نقطهٔ aa' صفحه‌ای عمود بر نیمساز فرجهٔ اول و موازی باخط زمین مرور دهید. با مطالعهٔ آثار این صفحه، خاصیتی‌برای آثار صفحات موازی با نیمساز فرجهٔ دوم نتیجه بگیرید .

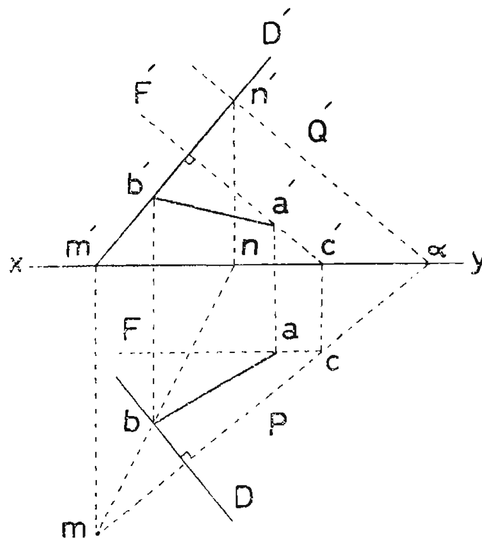
ب ـ از نقطهٔ aa' نیمرخی عمود برنیمساز فرجهٔ اول رسم‌کنید؛ آنگاه بر این نیمرخ صفحه‌ای عمود کرده آثار آن را بدست آورید . از مطالعهٔ آثار این صفحه ، خاصیتی برای آثار صفحات موازی با نیمساز فرجهٔ اول نتیجه بگیرید .

تمرین ۴ـ دو نقطهٔ (۵ و ۳ و ۲) A و (۴ و ۱ و ۴) B داده‌شده‌اند؛ مطلوب‌است تعیین مکان هندسی نقاطی ازفضا که از A و B به یك فاصله‌باشند.

۲۴ ـ مسئله ـ از نقطهٔ aa' خطی بر خط DD' عمود کنید.

مکان هندسی خطوطی که از یك نقطه بر یك خط عمود شوند، صفحه‌ای است که بر آن نقطه بگذرد و بر آن خط عمود باشد.

پس، از aa' صفحه‌ای بر DD' عمود می‌کنیم و bb' محل تلاقی خط DD' و صفحهٔ مذکور را بدست می‌آوریم ؛ خط aba'b' خط‌مطلوب است (شکل ۳۲) .



ش (۳۲)

تمرین ۱ـ خط AA' و تصویر افقی خط B داده شده‌اند ؛ تصویر قائم B را بدست آورید بقسمی که AA' و BB' متقاطع و عمود باشند .

تمرین ۲ـ نقاط aa' و bb' و c تصویر افقی نقطهٔ C داده شده است؛ c' را بدست آورید به فرض‌آنکه A و B و C سه رأس‌یك مستطیل‌باشند. مستطیل را رسم‌کنید .

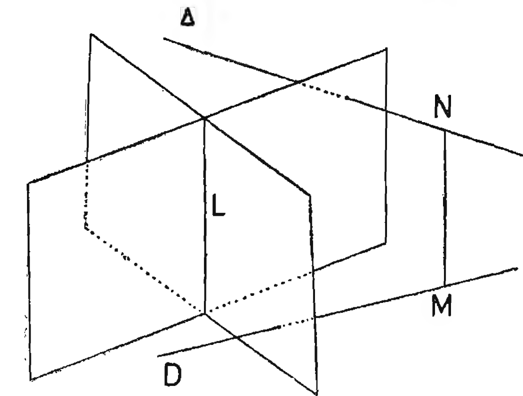
تمرین ۳ـ دو نقطهٔ M و N و خط Δ داده شده‌اند ؛ M و N دورأس مجاور مستطیلی هستند که یك رأسش برروی خط Δ است؛ مستطیل را بسازید .

۴ ـ عمود مشترك دو خط

۲۳ ـ تعریف ـ عمود مشترك دو خط متنافر خطی است که هر دو را قطع کند و بر هردو عمود باشد .

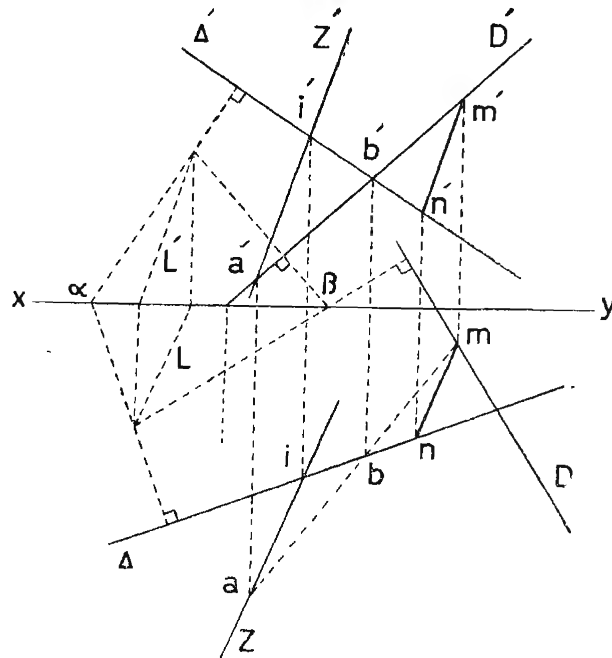
۲۴ ـ مسئله ـ عمود مشترك دوخط متنافر Δ و D را رسم کنید .

راه اول ـ دو صفحهٔ اختیاری بر Δ و D عمود می‌کنیم(شکل۳۳) وخط L فصل‌مشترك آنها را بدست می‌آوریم ؛ آنگاه خطی مانند MN به موازات L رسم می‌کنیم که Δ و D را قطع کند .



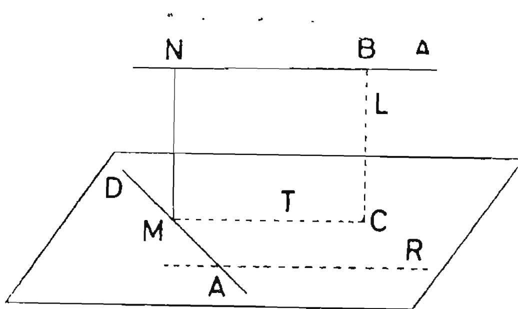
(ش ۳۳)

ملخص ـ دو خط DD' و $\Delta\Delta'$ مفروضند (شکل ۳۴) ؛ بر خط زمین دو نقطهٔ α و β اختیار کرده از آنها بترتیب دو صفحه بر $\Delta\Delta'$ و DD' عمود می‌کنیم و فصل مشترکشان LL' را بدست می‌آوریم ؛ این خط، موازی باعمودمشترك دوخط است؛ حال نقطه‌ای مانند ii' بر $\Delta\Delta'$ اختیارکرده از ii' خط zz' را موازی با LL' می‌کشیم و به کمك صفحهٔ منتصبی که بر DD' می‌گذرانیم فصل‌مشترك صفحهٔ $\Delta z\Delta' z'$ را با خط DD' بدست‌آورده mm' می‌نامیم؛ از mm' خطی موازی با LL' رسم می‌کنیم تا $\Delta\Delta'$ را در nn' قطع کند ؛ $mnm'n'$ عمود مشترك مطلوب است .



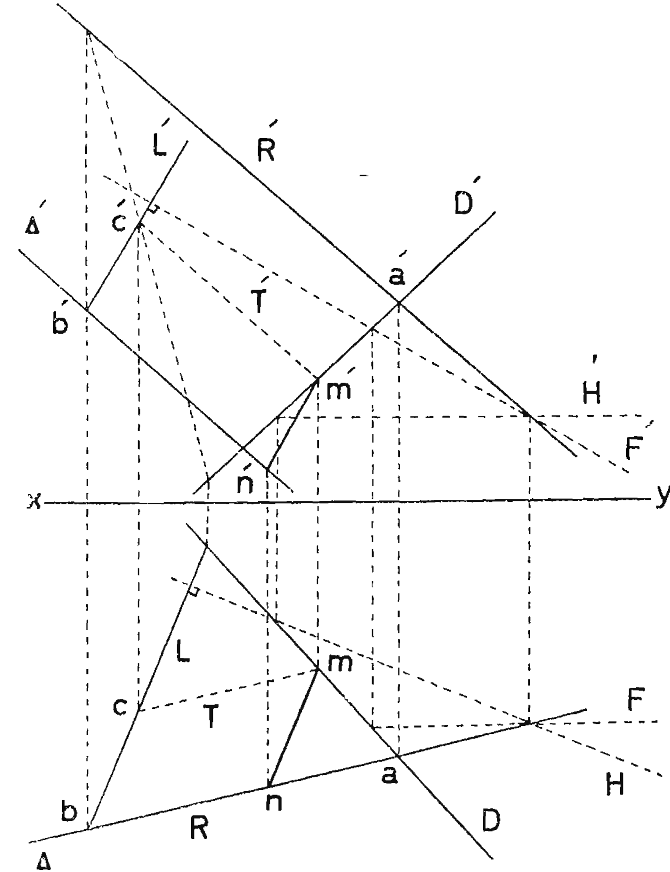
(ش ۳۴)

راه دوم ـ از نقطهٔ A واقع بر D خط R را موازی با Δ رسم می‌کنیم؛ صفحه‌ای که بر D و R می‌گذرد، با Δ موازی است؛ از نقطه‌ای مانند B از خط Δ عمود L را بر صفحهٔ مذکور فرود آورده C موقع آن را بدست می‌آوریم ؛ از C خط T را موازی با Δ می‌کشیم تا D را در M قطع کند ؛ MN را موازی با L رسم می‌کنیم؛ MN عمودمشترك مطلوب است (شکل ۳۵) .



(ش ۳۵)

ملخص ـ دوخط DD' و $\Delta\Delta'$ داده شده‌اند (شکل ۳۶) ؛ بر DD' نقطه‌ای مانند aa' اختیارکرده ازآن،خط RR'را موازی با $\Delta\Delta'$ می‌کشیم



(ش ۳۶)

(درشکل، نقطهٔ aa' طوری اختیار شده است که تصاویر افقی R و Δ برهم منطبق شوند) ؛ افقیهٔ HH' و جبهیهٔ FF' از صفحهٔ مار بر DD' و RR' را رسم کرده از نقطهٔ bb' که بر $\Delta\Delta'$ بطور اختیاری می‌گیریم ، عمود LL' را برصفحهٔ مذکور رسم می‌کنیم و به‌کمك صفحهٔ قائمی که

بر LL' می‌گذرانیم (درشکل، از رسم اثرقائم صفحهٔ کمکی که مورد استفاده واقع‌نمی‌شود، صرف نظر شده است) ، نقطهٔ cc' تقاطع LL' و صفحهٔ $DRD'R'$ را تعیین می‌کنیم؛ از cc' خط TT' را موازی با $\Delta\Delta'$ می‌کشیم تا DD' را در mm' قطع‌کند؛ $mnm'n'$ را موازی با LL' رسم می‌کنیم تا $\Delta\Delta'$ را در nn' تلاقی‌کند ؛ $mnm'n'$ عمود مشترك مطلوب است .

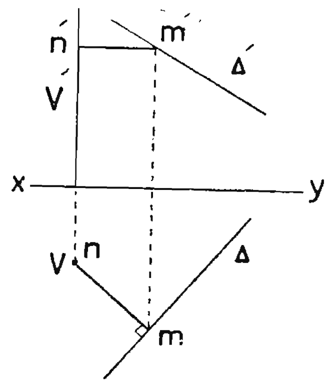
۲۵ ـ حالتهای خاص :

I ـ یکی از دوخط مفروض، قائم (یا منتصب) است .

مثال ـ اگر بخواهیم عمود مشترك خط قائم VV' و خط غیر مشخص $\Delta\Delta'$ را رسم کنیم (شکل ۳۷) ، به این نکات توجه می‌کنیم :

الف ـ عمود مشترك‌مطلوب، بر خط‌قائم VV' عمود است ، پس خطی است افقی .

ب ـ خط‌افقی مذکور، با $\Delta\Delta'$ زاویهٔ قائمه‌ای می‌سازد که یك ضلعش (یعنی همان افقیه) با صفحهٔ تصویر موازی است ، پس تصویر افقی افقیهٔ نامبرده عمود می‌شود بر Δ .



(ش ۳۷)

ج ـ تصویر افقی عمود مشترك، بر V می‌گذرد.

تصویر افقی عمود مشترك، Δ را در m قطع می‌کند؛ m' را بدست می‌آوریم و تصویرقائم عمود مشترك را به موازات خط زمین می‌کشیم .

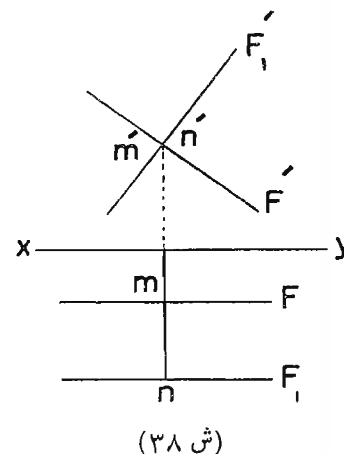
قطعهٔ $mnm'n'$ درتصویر افقی به اندازهٔ حقیقی تصویر شده است.

II ـ هردوخط مفروض با یکی از صفحات تصویر، مثلا با صفحهٔ قائم، موازیند.

مثال ـ برای رسم کردن عمود مشترك دوخط جبهی (شکل ۳۸)، به این نکات توجه می‌کنیم:

الف ـ صفحه‌ای‌که برخط‌جبهی FF' به موازات جبهیهٔ $F_1F'_1$ مرور کند، جبهی است.

ب ـ پس عمود مشترك دو خط، که برآن صفحه عمود است، منتصب است.



(ش ۳۸)

ج ـ تصویر قائم منتصب مذکور، نقطهٔ تلاقی F' و F'_1 است.

عمود مشترك مطلوب، در تصویر افقی به مقدار حقیقی تصویر می‌شود.

تمرین ۱ ـ عمود مشترك دو خط D و Δ را در حالتهای زیر رسم کنید: الف ـ D افقیه و Δ جبهیه ، ب ـ D قائم و Δ منتصب ، ج ـ هردو نیمرخ ، د ـ هردو مواجه ، هـ ـ D نیمرخ و Δ مواجه .

تمرین ۲ ـ قطعه‌خط $aba'b'$ عمود مشترك دو خط متنافر است که تصاویر افقیشان در دست هستند؛ تصاویرقائمشان را بدست آورید .

تمرین ۳ ـ عمود مشترك دوخط متنافرکه یکی افقیه و دیگری‌جبهیه است داده شده است؛ آن خطوط را رسم کنید .

تمرین ۴ ـ صفحه‌ای به یك فاصله از دو خط متنافر D و Δ مرور دهید .

۳۶ـ تعریف ـ طول عمود مشترك دوخط متنافر را فاصلهٔ دوخط از یکدیگر می‌گویند .

خلاصهٔ مطالب مهم :

۱ ـ شرط متوازی بودن دوصفحه آن است که دو خط متقاطع یکی‌با دو خط متقاطع دیگری موازی باشند . در صفحات متوازی، آثار همنام باهم موازیند .

۲ ـ برای تعیین فصل مشترك دو صفحه، از دو صفحهٔ کمکی استفاده می‌کنیم. صفحات‌کمکی غالباً صفحات افقی و قائم تصویر هستند و اگراستفاده ازآنها ممکن نباشد ، عموماً صفحات افقی یاجبهی یا قائم یا منتصب بعنوان کمکی اختیار می‌شوند .

۳ ـ برای تعیین فصل مشترك خط و صفحه ، برخط یك‌صفحهٔ کمکی می‌گذرانیم تا صفحهٔ مفروض را قطع‌کند ؛ هرجا که فصل مشترك دوصفحه خط مفروض را قطع کند، نقطهٔ مطلوب است .

۴ ـ اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد ، تصویر افقیش عمود است بر اثر افقی و تصویر افقی افقیه‌های صفحه و تصویرقائمش عمود است براثرقائم و بر تصویر قائم جبهیه های صفحه .

۵ ـ خط عمود برصفحهٔ مواجه نیمرخ است و برای رسم آن باید صفحهٔ نیمرخی رسم کرد و فصل مشترك آن را با صفحهٔ مواجه بدست آورد؛ نیمرخ عمود براین فصل مشترك، عمود مطلوب است .

تمرین

۱ـ آثارقائم دوصفحه، متوازی و معلومند ویك نقطه از فصل مشترك دو صفحه هم داده شده است ؛ آثار افقی آن دو را بدست آورید .

۲ـ فصل مشترك دو صفحه یکی از خطوط زیر است ؛ تحقیق کنیدکه آثار آنها چه وضعی دارند .

الف‌ـ نیمرخی‌موازی‌با نیمساز فرجهٔ‌اول. ب‌ـ نیمرخی‌موازی با نیمساز

فرجهٔ دوم . ج ـ خطی غیرمشخص واقع در نیمساز فرجهٔ اول. د ـ خط غیر مشخصی واقع در نیمساز فرجهٔ دوم .

۳ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ وخط غیرمشخص $\Delta\Delta'$ و خط قائم VV' داده‌شده‌اند؛ مطلوب است رسم خطی به موازات صفحهٔ مفروض که بر دوخط مذکور متکی باشد و تصویر افقیش بر نقطهٔ معین می‌گذرد .

۴ـ خطی چنان رسم کنیدکه تصویر افقیش بر نقطهٔ معینی بگذرد و با دو صفحهٔ مفروض موازی باشد و خط مفروضی را هم قطع کند .

۵ ـ خطی رسم کنید که سه خط متنافر را قطع کند . در تعداد جوابها دقت کنید .

۶ ـ خطی رسم کنید که سه خط متنافر را قطع کند و به وسیلهٔ نقاط تقاطع، به دوجزء تقسیم شود که بر نسبت m و n باشند .

۷ـ تصاویر افقی‌افقیه‌هایی که بر دو خط جبهی متنافر متکی‌باشند، در یك نقطه متقاربند .

۸ـ ثابت کنید که هرگاه تصاویر افقی دو خط‌متنافر متوازی باشند ، همهٔ افقیه‌هایی‌که برآن دو خط متکی شوند، با خط قائم ثابتی تلاقی می‌کنند.

۹ـ ازنقطهٔ واقع بر خطی ، خطی برآن عمود کنید که خط مفروض دیگری را قطع کند .

۱۰ـ صفحهٔ P و خط Δ داده شده‌اند ؛ خطی عمود بر Δ رسم کنید که آن را قطع کند و در صفحهٔ P واقع باشد .

۱۱ـ خطی موازی بانیمرخ مفروض و متکی‌بر دوخط غیرمشخص رسم کنید .

۱۲ـ خطی موازی‌بادوصفحهٔ مفروض و متکی بر دو خط مفروض رسم کنید .

۱۳ـ سه صفحه و نقطه ای خارج آنها داده شده‌اند ؛ بر نقطه، خطی موازی‌بایکی ازآن صفحات مرور دهید که دو صفحهٔ دیگر را قطع کند وآن نقطه وسط قطعهٔ محصور بین آن صفحات باشد .

۱۴ـ بر دونقطهٔ A و B صفحه‌ای بگذرانید که از دونقطهٔ C و D

به یك فاصله باشد .

۱۵ـ بر نقطهٔ A صفحه‌ای بگذرانید که ازسه‌نقطهٔ B و C و D به‌یك فاصله باشد .

۱۶ـ صفحه‌ای به موازات خط مفروض Δ رسم کنید که از سه نقطهٔ A و B و C به یك فاصله باشد .

۱۷ـ صفحه‌ای چنان مرور دهیدکه از چهارنقطهٔ مفروض به یك فاصله باشد .

۱۸ـ بر صفحهٔ مفروض نقطه‌ای تعیین کنید که از سه نقطهٔ مفروض به یك فاصله باشد .

۱۹ـ مرکزکره‌ای راکه برچهار نقطهٔمفروض می‌گذرد، بدست‌آورید.

۲۰ـ بر سه‌نقطهٔ مفروض سه‌صفحهٔ متوازی ومتساوی‌الفاصله مرور دهید که یکی از آنها بر نقطهٔ معینی بگذرد .

۲۱ـ بر دونقطه ویك‌خط، سه‌صفحهٔ متوازی ومتساوی‌الفاصله‌بگذرانید.

۲۲ـ ثابت کنید که اگر آثار صفحه‌ای نسبت به xy قرینهٔ یکدیگر باشند ، آن صفحه عمود بر نیمساز فرجهٔ اول است .

۲۳ـ ثابت کنید که اگر آثار صفحه‌ای بر یك امتداد باشند ، صفحه عمود بر نیمساز فرجهٔ دوم است .

۲۴ـ تصویر افقی لوزی و تصویر قائم یك قطر آن داده شده است ؛ ملخص‌لوزی را تکمیل‌کنید .

۲۵ـ $aba'b'$ قاعدهٔ یك مثلث متساوی‌الساقین و c' تصویرقائم رأس آن داده شده‌اند ؛ مثلث را رسم‌کنید .

۲۶ـ صفحه‌ای چنان رسم‌کنیدکه تصاویرچهار نقطهٔ A و B و C و D بر روی‌آن، رئوس یك متوازی‌الاضلاع باشند .

۲۷ـ از کنج سه‌قائمه‌ای ملخص رأس وملخص یك یال و تصویر افقی یك یال دیگر داده شده‌اند ؛ ملخص کنج را بسازید .

۲۸ـ چهار خط متقارب چهار یال‌کنجی را تشکیل می‌دهند ؛ برنقطهٔ مفروض M صفحه‌ای چنان مرور دهیدکه از تقاطعش باوجوه‌کنج، یك‌متوازی‌ـ

الاضلاع بوجود آید .

۲۹- بر نقطهٔ مفروض M خطی چنان مرور دهید که خط مفروضی را قطع کند و بر خط مفروض دیگری عمود باشد .

۳۰- خط قائمی به بعد e رسم کنید که فاصله‌اش از خط مفروضی مساوی l باشد (یعنی طول عمود مشترکشان l باشد) .

۳۱- یك خط قائم و تصویر قائم خط غیرمشخص D و یك نقطه از تصویر افقی D و فاصلهٔ خط D از خط قائم مذکور در دست است؛ تصویر افقی D را رسم‌کنید .

۳۲- در صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ بر نقطهٔ مفروض M خطی مرور دهید که فاصله‌اش از خط قائم مفروضی l باشد .

۳۳- از یك نقطهٔ واقع در نیمساز فرجهٔ دوم،صفحه‌ای بر خطی واقع در همان صفحه عمود کنید .

۳۴- فاصلهٔ حقیقی بین دو صفحهٔ متوازی را بدست آورید .

۳۵- فاصلهٔ حقیقی یك نقطهٔ واقع بر خط زمین را از خط مفروضی بدست آورید .

۳۶- بر روی خط نیمرخی نقطه‌ای پیدا کنید که از صفحهٔ $P\alpha Q'$ به فاصلهٔ l باشد .

۳۷- صفحه‌ای به موازات صفحهٔ دیگر چنان مرور دهید که جزئی از خط مفروض که بین آن دو صفحه می‌ماند به طول l باشد .

۳۸- دو صفحه به وسیلهٔ آثارشان داده شده‌اند ؛ تحقیق کنید بر هم عمودند یا نه .

مسائل رقومی امتحانات نهایی

۱- محور اقصر کاغذ، افقیهٔ رقوم صفر صفحهٔ P است که اساس آن ۱/۵ اختیار شده و ترقی رقوم از پایین به بالاست (مقیاس $\frac{1}{1}$ و واحد برابر یك

سانتیمتر است) .

۱- نقطهٔ o_5 را در صفحه روی محور اطول کاغذ بدست آورید .

۲- این نقطه رادرحول افقیهٔ رقوم صفرصفحهٔ P تسطیح کنید .

۳- O_1 یعنی تسطیح نقطه را مرکز متوازی‌الاضلاع اختیار کنید که طول قطر A_1C_1 از آن برابربا ۱۰ بوده و رقوم رئوس A_1 و C_1 بعد از ترفیع، بترتیب برابر ۷ و ۳ گردد و نقطهٔ A_1 طرف چپ محور اطول کاغذ باشد ؛ این قطر را رسم کنید .

۴- فاصلهٔ حقیقی ضلع D_1C_1 از مرکز O_1 برابر ۱/۵ است و رقوم رأس B_1 بعد از ترفیع، برابر ۴ می‌شود ؛ دورأس B_1 و D_1 را بدست‌آورید.

۵- این متوازی‌الاضلاع را قاعدهٔ یك متوازی السطوح قائمی اختیار کنید ؛ به فرض آنکه رقوم رأس e متعلق به یال ae از آن برابر ۱۷ شود، چهار رأس دیگر متوازی‌السطوح و تصویر تمام یالهای آن را رسم کنید .

۶- خطوط مرئی و مخفی را از یکدیگر تمیز دهید .

(خرداد ۱۳۳۷ تهران)

۲- شیب صفحه‌ای $\frac{1}{2}$ است و افقیهٔ رقوم ۵ صفحه وسط کاغذ می‌باشد؛ کنار ورقه، خط بزرگترین‌شیب صفحه‌را رسم‌کرده ازپایین به بالا مدرج کنید. نقطهٔ a روی افقیهٔ رقوم ۴ و طرف راست آن، نقطهٔ b روی افقیهٔ رقوم ۵ بطوری که شیب خط AB مساوی $\frac{1}{6}$ باشد،قرارگرفته‌اند؛ مثلث ABC روی صفحه است ؛ زاویهٔ B در فضا قائمه و نقطهٔ C به ارتفاع ۷ می‌باشد ؛ تصویر مثلث‌را بدست آورید. ثانیاً از نقطهٔ A خطی برصفحهٔ مثلث عمودکرده آن را تا نقطهٔ D به ارتفاع صفر مدرج کنید . تصویر هرم ABCD را رسم کنید. (واحد سانتیمتر) .

(متفرقه خرداد ۱۳۳۷)

۳- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱- مقیاس شیب صفحهٔ P را طرف چپ کنار اطول کاغذ و به فاصلهٔ

یک سانتیمتر از آن با اساس یک رسم‌کنید بقسمی‌که افقیهٔ صفر صفحه برمحور اقصر کاغذ منطبق بوده و ترقی رقوم از پایین به بالا باشد .

۲ـ در صفحهٔ P نقطهٔ a_2 را طوری اختیار کنید که فاصلهٔ آن با مقیاس شیب صفحه برابر ۹ شود .

۳ـ در صفحهٔ P نقطهٔ b_4 را طرف چپ a_2 بطریقی تعیین کنید که طول حقیقی AB برابر ۵ شود .

۴ـ در صفحهٔ P نقطهٔ c_7 را طرف راست b_4 قسمی معین کنیدکه شیب خط b_4c_7 برابر $\frac{2}{3}$ شود .

۵ ـ با دو ضلع a_2b_4 و b_4c_7 متوازی‌الاضلاعی رسم‌کنید .

۶ـ نقطهٔ s_3 را طوری بدست آورید که خط s_3c_7 بر صفحهٔ P عمود باشد .

۷ـ نقطهٔ s_3 رأس هرمی است‌که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع $a_2b_4c_7d_5$ می‌باشد؛ یالهای این هرم را رسم کرده خطوط مرئی و مخفی‌را از یکدیگر تمیز دهید .

(شهریور ۱۳۳۷ تهران)

۴ـ کادر تقریباً ۲۰ × ۲۵ ؛ گوشهٔ چپ و پایین کاغذ را به‌گوشهٔ راست و بالای آن وصل کنید؛ این‌خط D است که از پایین به بالا مدرج شده اساس آن ۲ سانتیمتر و روی آن نقطهٔ a_4 وسط کاغذ می‌باشد ؛ از این خط صفحهٔ P می‌گذرد که با صفحهٔ افق زاویهٔ ۴۵° می‌سازد (از دوجواب، آن‌را انتخاب کنیدکه بزرگترین شیبش‌تقریباً در امتداد محوراطول‌کاغذباشد)؛ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع روی‌این صفحه است؛ a_4 و b_8 روی خط D و نقطهٔ C ارتفاعش از A بیشتر است؛ این‌مثلث، قاعدهٔ چهاروجهی منتظمی است که رأس S آن، زیر صفحهٔ P قرار دارد؛ مطلوب‌است ملخص‌هرم و مقطع آن باصفحهٔ افقی ۵ .

(متفرقه شهریور ۱۳۳۷)

۵ـ واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ و محل تلاقی دو قطر کاغذ، مرکز آن است .

۱ـ مقیاس شیب صفحهٔ P را که شیبش $\frac{1}{2}$ است، در کنار چپ کاغذ به موازات محور اطول آن چنان رسم‌کنید که افقیهٔ رقوم ۲ صفحه از مرکز کاغذ بگذرد و ترقی رقوم آن از پایین به بالا باشد؛ در این صفحه نقطهٔ o_2 را روی محور اطول کاغذ اختیار کنید .

۲ـ o_2 مرکز لوزی ABCD واقع در صفحهٔ P می‌باشد که قطر BD از آن در تسطیح با اثر صفحه زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و آن را در چپ محور اطول قطع می‌کند وشعاع دایرهٔ محاطی ۲/۵ بوده وزاویهٔ A مساوی ۶۰° است، رقوم B از رقوم D کمتر و رقوم C ازرقوم A بیشتر است ؛ملخص لوزی را رسم کنید .

۳ـ صفحهٔ Q را به فاصلهٔ ۳/۵ به موازات صفحهٔ P در پایین آن رسم کرده مقیاس شیب صفحهٔ Q را در کنار راست کاغذ بکشید .

۴ـ از نقطهٔ O خط Δ را به اساس ۳ چنان رسم کنید که تصویرش با امتداد افقیه‌های صفحه زاویهٔ ۶۰° بسازد و از پایین به بالا و از چپ به‌راست ممتد باشد و ترقی رقومش از بالا به پایین باشد .

۵ ـ ملخص نقطهٔ S محل برخورد صفحهٔ Q را با خط Δ معین‌کنید .

۶ـ ملخص هرم SABCD را رسم کرده خطوط مرئی و مخفی آن را مشخص کنید .

(خرداد ۱۳۳۸ تهران)

۶ـ مطلوب است رسم چهار وجهی SABC به فرض آنکه :

۱ـ رأس S سه‌قائمه باشد .

۲ـ تصویر رأس S نقطهٔ s_{10} برمرکز کاغذ منطبق باشد .

۳ـ تصویر یال SA بر امتداد قطر اقصر کاغذ واقع است .

۴- دو صفحهٔ ASC و BSC باصفحهٔ افق بترتیب زاویهٔ °۶۹ و °۴۸ ساخته‌اند .

۵- قاعدهٔ ABC در صفحهٔ افق تصویر قرار دارد .

۷- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ و محل تلاقی دو قطر کاغذ (α) مرکز آن است .

۱- مقیاس شیب صفحهٔ P راکه با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ °۳۰ می‌سازد ، در کنار چپ کاغذ به موازات محور اطول آن چنان رسم کنید که اثر صفحه از α بگذرد و رقومش از پایین به بالا ترقی‌کند؛ در این صفحه نقطهٔ $o_{۳}$ را طرف راست محور اطول به فاصلهٔ ۳ از آن اختیار کنید .

۲- ملخص مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (قائمه در A) را که درصفحهٔ P واقع است ،باشرایط زیر رسم کنید : AB افقیه است ۳=AC و $o_{۳}$ مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مماس به ضلع AC و شعاع این دایره نیز ۲ است و B طرف چپ A قرار دارد و رقوم C از رقوم A بیشتر است .

۳- از α خط D را در صفحهٔ P چنان رسم کنید که تصویرش با اثر صفحه زاویهٔ °۶۰ بسازد و از پایین به بالا به طرف چپ ممتد باشد .

۴- از خط D صفحهٔ Q را به شیب یك مرور دهید (از دو جواب، آن را اختیار کنید که افقیهٔ رقوم ۲ صفحهٔ Q ، اثر صفحهٔ P را طرف راست α قطع کند) .

۵- ملخص هرم SABC را با شرایط زیر رسم کنید : S درصفحهٔ Q قرار دارد ، وجه SAB افقی است و SB برابر SA می‌باشد .

۶- خطوط مرئی و مخفی را مشخص کنید .

(شهریور ۱۳۳۸ تهران)

۸- واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱۰}$ است .

دو نقطهٔ $a_{۳۸}$ و $b_{۵۶}$ تصاویر دو نقطهٔ A و B و ۴۲=ab است .

۱- بر خط AB صفحهٔ P را به شیب $\frac{۱}{۲}$ مرور دهید .

۲- در صفحهٔ P روی AB مربع ABCD را بسازید .

۳-مربع مز بور،قاعدهٔ منشور قائمی است‌که ارتفاعش برابراست با ۶۰ ؛ این منشور را رسم کنید .

۴- مقطع این منشور را به وسیلهٔ دو صفحهٔ افقی که موازی یکدیگر و به فاصلهٔ یك سانتیمتراز هم رسم شده‌اند ، پیدا کنید .

(متفرقه شهریور ۱۳۳۸)

۹- مسئلهٔ اول : واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است . محورهای کاغذ را محورهای مختصات اختیار کنید .

۱- نقطهٔ $o_{۲}$ را به طول ۳ و به عرض ۲/۵ معین کنید و خطی رسم کنید که محور طولها را به طول ۳ — ومحورعرضها را به عرض ۳ — قطع کند؛ روی این‌خط ،نقطه‌ای به‌طول ۱۰ — اختیار کنید ؛ از همین‌نقطه مقیاس شیب صفحهٔ P را که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ °۴۵ می‌سازد، رسم کنید بقسمی که اثر صفحه، خط مذکور بوده و رقومش از چپ به راست ترقی کند .

۲- از نقطهٔ $o_{۲}$ خطی بر صفحهٔ P عمود کرده و موقع عمود را معین کنید .

۳- اگر $m_{۴}$ موقع عمودباشد ،اندازهٔ حقیقی $o_{۲}m_{۴}$ را معین کنید .

۴- از $m_{۴}$ خط Δ را در صفحهٔ P رسم کنید بطوری که تصویر خط با محور طولها زاویهٔ °۶۰ بسازد و به طرف راست کاغذ بالارود . این خط را مدرج کنید .

۵- ملخص مکعبی را رسم کنید که مرکزش نقطهٔ $o_{۲}$ و قاعده‌اش در صفحهٔ P و یك ضلع قاعده به موازات Δ باشد .

۶- خطوط مخفی و مرئی جسم را مشخص کنید .

مسئلهٔ دوم : دوخط $a_{۱}b_{۴}$ و $c_{۲}d_{۵}$ را بقسمی رسم کنید که ab موازی

cd بوده اولی به اساس یك ودومی به اساس دو باشد ؛عمود مشترك این دوخط را پیدا کنید .

(خرداد ۱۳۳۹ تهران)

۱۰ ـ واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است .

۱ـ پاره‌خط a_0b_4 را برابر $(ab=۸)$ به موازات محور اقصر کاغذ طوری بگیرید که فاصلهٔ نقطهٔ a_0 از کنار راست کاغذ ۷ و فاصلهٔ آن از کنار تحتانی کاغذ ۸ و نقطهٔ b_4 طرف چپ a_0 باشد .

۲ـ از نقطهٔ b_4 صفحهٔ P را عمود بر خط a_0b_4 مرور داده و اثر آن صفحه را رسم کنید .

۳ـ نقطهٔ b_4 را در حول اثر صفحهٔ P تسطیح کنید .

۴ـ برخط a_0b_4 صفحهٔ دیگر P' را طوری مرور دهید که با صفحهٔ قائم مصور خط a_0b_4 زاویهٔ ۴۵° تشکیل داده و بعلاوه آثار دو صفحهٔ P و P' همدیگر را روی کاغذ دریك نقطهٔ c_0 که تعیین خواهید کرد طرف بالای امتداد a_0b_4 تلاقی کنند.

۵ ـ طولهای حقیقی اضلاع مثلث $a_0b_4c_0$ را حساب کرده و از این‌رو ثابت کنید مثلث فضایی aBc در رأس B قائم‌الزاویه است .

۶ـ بر روی aBc مستطیل aBcD را بنا کرده و ملخص آن را که متوازی‌الاضلاع $a_0b_4c_0d$ است رسم و رقوم نقطهٔ d را مشخص کنید .

۷ـ بر روی مستطیل مزبور،مکعب مستطیلی را که طول حقیقی ارتفاع آن برابرقطر a_0c_0 قاعده بوده و چهار رأس دیگر آن تماماً دارای ارقام مثبت هستند، بنا کرده ملخص آن را رسم کنید .

۸ ـ با فرض کدر بودن مکعب مستطیل،خطوط مرئی‌را از مخفی تمیز بدهید .

(متفرقه خرداد ۱۳۳۹)

۱۱ـ واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است .

قطر اقصر کاغذ اثر صفحهٔ P است که شیبش $\frac{۲}{۳}$ می‌باشد و ترقی رقومش از پایین به بالاست ؛در این صفحه نقطهٔ o_3 واقع برمحور اطول مرکز شش‌ضلعی منتظمی است که قطر دایرهٔ محیطیش ۸ بوده ویکی از اقطارش افقی است؛ ملخص آن را رسم کنید .

۲ـ این شش‌ضلعی قاعدهٔ هرم ناقص منتظمی است به ارتفاع ۱۱ که قاعدهٔ دیگرش در پایین صفحهٔ P واقع‌است وقطر این قاعده ۴ است؛ ملخص جسم را تعیین کرده خطوط مرئی و مخفی آن را تعیین کنید .

(شهریور ۱۳۳۹ تهران)

۱۲ـ واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است . پاره‌خط a_0d_3 را به طول $ad=۶$ روی محور اقصر کاغذ طوری بگیرید که نقاط a و d نسبت به‌محور اطول کاغذ قرینهٔ یکدیگر بوده و نقطهٔ a سمت چپ d باشد .

۱ـ شیب و اساس و طول حقیقی پاره‌خط a_0d_3 را معین‌کنید .

۲ـ بر پاره‌خط a_0d_3 دو صفحه با شیب واحد مرور داده و آثار این دو صفحه را رسم کنید .

۳ـ ازنقطهٔ d_3 صفحهٔ سومی عمود برخط a_0d_3 مرور داده و اثر این صفحه را نیز رسم کنید .

۴ـ آثار سه صفحهٔ نامبرده دوبدو همدیگر را در نقاط a_0 و b_0 و c_0 قطع می‌کنند؛مثلث $c_0b_0a_0$ را مشخص کنید . (b_0 بالای محور اقصر کاغذ و c_0 زیر آن است) .

۵ ـ مقدار حقیقی زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ حاصل از تقاطع دو صفحهٔ $c_0a_0d_3$ و $b_0a_0d_3$ را به وسیلهٔ تسطیح معلوم کنید .

۶ـ مثلث $a_0b_0c_0$ یکی از قواعد منشور مثلث‌القاعدهٔ مایلی است که

پاره‌خط c_0d_3 یکی از یالهای جانبی آن است ؛ ملخص این منشور را تکمیل کنید .

۷ـ با فرض کدر بودن منشور ، خطوط‌مرئی را از مخفی تمیز بدهید.

۸ـ حجم منشور فوق را دقیقاً حساب کنید .

(متفرقه شهریور ۱۳۳۹)

۱۳ـ واحد سانتیمتر ، مقیاس $\frac{1}{1}$ و محورهای‌مختصات ،محورهای‌کاغذ می‌باشد .

مسئلهٔ اول ـ مقیاس شیب صفحهٔ P را به اساس یك،کنار چپ کاغذ به موازات محور اطول رسم کنید ؛اثر صفحه از مرکز کاغذ می‌گذرد وترقی رقوم به بالا است :

۱ـ در صفحهٔ P نقطهٔ a_1 به فاصلهٔ ۶ طرف راست مقیاس شیب و نقطهٔ b_2 را طرف چپ a طوری اختیار کنید که $AB=3$ باشد .

۲ـ نقطهٔ o_3 را در صفحهٔ P طرف راست a قسمی اختیار کنید که $\widehat{AOB}=30^\circ$ باشد .

۳ـ ملخص متوازی‌الاضلاعی را رسم کنید که a_1 و b_2 دو رأس مجاور و o_3 محل تلاقی دو قطرش باشد .

۴ـ اگر $a_1b_2c_5d_4$ متوازی‌الاضلاع مطلوب باشد ، ملخص منشوری را رسم کنید که قاعدهٔ تحتانی آن این متوازی‌الاضلاع بوده و تصویریالهای جانبی‌آن به موازات محور اقصر و طول حقیقی هر یك از آنها ۵ و اختلاف رقوم انتهای یالها ۳ باشد ؛ خطوط مرئی و مخفی جسم را مشخص کنید . (قاعدهٔ دیگر، سمت راست abcd است .)

مسئلهٔ دوم ـ نقاط $a\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ و $b\left|\begin{matrix}-2\\0\end{matrix}\right.$ و $c\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$ که رقوم آنها بترتیب دو و یك و صفراست، سه رأس مثلثی می‌باشند . مقیاس شیب صفحهٔ مثلث و ملخص محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث را معین کنید و نقطه‌ای روی صفحهٔ مقایسه

بدست آورید که از سه ضلع مثلث به یك فاصله باشد .

(خرداد ۱۳۴۰ تهران)

۱۴ـ محورهای اقصر و اطول کاغذ را رسم‌کنید؛ محل‌تلاقی آنهامرکز کاغذ ، واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱ ـ دو نقطهٔ s_0 و h_8 را روی محور اطول و زیر محور اقصر به این ترتیب انتخاب کنید: فاصلهٔ s تا مرکزکاغذ ۲ و $sh=4$.

۲ـ ازنقطهٔ s خط‌عمودی بر SH در نظر بگیرید که تصویر آن، محور اقصر را درفاصلهٔ ۲ چپ‌مرکزکاغذتلاقی کند ؛ روی ملخص مدرج‌این خط، نقطهٔ a_2 را اختیار کنید .

۳ـ شیب صفحهٔ $a_2s_0h_8$ را حساب کنید .

۴ـ SA یکی از یالهای هرم مثلث‌القاعدهٔ SABC است بطوری که یال AB آن افقیه است که تصویر آن موازی محور اطول کاغذ و یال BC بر صفحهٔ ASH عمود بوده و تصویر آن از h می‌گذرد، بالاخره تصویر یال SC موازی محوراقصر کاغذاست؛ تصاویر دو رأس B و C را تعیین و رقومهای آنها را حساب کنید .

۵ ـ ملخص هرم را رسم و با فرض کدر بودن سطح آن،خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

۶ـ وسعت مثلث ASB را به وسیلهٔ تسطیح مشخص کنید .

۷ـ ملخص عمود مشترك دو خط متنافر و نامحدود SC و AB و همچنین کوتاهترین فاصلهٔ‌میان آنها را به وسیلهٔ تسطیح تعیین کنید .

(متفرقه خرداد ۱۳۴۰)

۱۵ـ (واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است) .

مسئلهٔ اول ـ مثلث ABC در صفحهٔ P که شیبش $\frac{1}{2}$ است واقع است.

a_2 و b_1 بترتیب به فاصلهٔ ۶ و ۴ از مقیاس شیب صفحه‌که با محور اطول کاغذ موازی است و اثر صفحه از مرکز کاغذ می‌گذرد ، قرار دارند .

میانهٔ رأس A به درازای ۲/۵ و رقوم رأس C برابر ۳ است و c سمت چپ a واقع است ؛ ملخص مثلث را رسم‌کنید.

۲ـ ملخص منشور ABCDEF را رسم کنید که یالهای جانبی آن نیز به شیب $\frac{1}{2}$ بوده و تصویرشان با محور اقصر کاغذ موازی می‌باشد و قاعدهٔ DEF به فاصلهٔ ۱/۲ از قاعدهٔ ABC و در پایین آن واقع است (def را سمت راست abc اختیار کنید و اگر رأس c_3 را در فرض اول نتوانسته‌اید پیدا کنید، آن را بدلخواه انتخاب کرده و حل قسمت دوم را ادامه دهید) .

۳ـ مرئی و مخفی یالهای جسم را مشخص کنید .

مسئلهٔ دوم ـ تصاویر خطوط بزرگترین شیب‌دو صفحهٔ P و Q متوازیند؛ زاویهٔ این دو صفحه را معین کنید .

(شهریور ۱۳۴۰ تهران)

۱۶ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم‌کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ،واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱ـ ملخص چهاروجهی $a_0b_0c_0d_4$ را که در آن،مثلث $a_0b_0c_0$ روی صفحهٔ مقایسه ومتساوی‌الاضلاع است، به این ترتیب رسم کنید: a_0 روی محور اطول به فاصلهٔ ۵ بالای مرکز کاغذ، d_4 نیز روی محور اطول به فاصلهٔ ۳ زیر مرکز کاغذ تصویر شده، ضلع b_0c_0 منطبق برمحور اقصر و b_0 طرف چپ مرکز است .

۲ـ طول حقیقی یال b_0d_4 را به وسیلهٔ محاسبه و طول حقیقی یال a_0d_4 را به وسیلهٔ تسطیح ساده بدست آورید .

۳ـ به وسیلهٔ رسم مقیاس شیب،ثابت کنید زاویهٔ هر یك از دو صفحهٔ $a_0b_0d_4$ و $a_0c_0d_4$ با صفحهٔ مقایسه ۴۵ درجه است .

۴ـ به وسیلهٔ تسطیح ثابت کنید که زاویهٔ cDb مساوی ۶۰ درجه است.

۵ـ عمود مشترك دویال a_0d_4 و b_0c_0 را تعیین و طول حقیقی کوتاه‌ترین فاصلهٔ میان این دو خط را حساب کنید .

۶ـ دو وجه $a_0b_0d_4$ و $a_0c_0d_4$ از چهاروجهی نامبرده را قاعده قرار داده و روی آنها دو منشور مثلث‌القاعدهٔ قائم در طرف خارج چهاروجهی بقسمی بنا کنید که طول حقیقی ارتفاع مربوط به هریك از آنها $4\sqrt{2}$ باشد؛ ملخص شکلی را که به وسیلهٔ چهاروجهی قبلی و این دو منشور قائم بدست می‌آید، رسم ورقومهای رؤس جدید آن را تعیین و با فرض کدر بودن شکل نامبرده، خطوط‌مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

(متفرقه شهریور ۱۳۴۰)

۱۷ـ محور اطول کاغذ را رسم‌کنید؛ واحد سانتیمترو مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

اثر h_0 صفحهٔ P را به موازات کنار تحتانی کاغذ و به فاصلهٔ ۸ ازآن رسم کنید؛ این صفحه با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل داده و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از پایین به بالاست .

۱ـ دو نقطهٔ a_3 و c_9 را روی صفحهٔ P طوری بگیریدکه تصاویرآنها بر روی محور اطول کاغذ قرار بگیرد .

۲ـ طول AC را حساب کنید .

۳ـ مربع ABCD را بر روی صفحهٔ P که AC یکی از اقطار آن است، در نظرگرفته‌تسطیح و سپس ملخص این مربع را رسم کنید ؛ b سمت راست محور اطول است .

۴ـ از مرکز این مربع، خطی‌عمود بر صفحهٔ آن رسم کرده و نقطهٔ e_0 اثر این خط را بدست آورید .

۵ ـ نقطهٔ f قرینهٔ e_0 را نسبت به صفحهٔ مربع پیدا کرده و رقوم آن را تعیین و ملخص شکل EABCDF را رسم‌کنید .

۶ـ بر اثر h_0 مجدداً دو صفحهٔ دیگر P′ و P″ را چنان مرور دهید

که زوایای آنها با صفحهٔ مقایسه بترتیب ۳۰ و ۶۰ درجه بوده و ترقی رقومهای مقیاس شیب آنها هردو نیز از پایین به بالا باشد ؛ مقیاس شیب صفحهٔ P' را به فاصلهٔ یك کنار راست ومقیاس شیب صفحهٔ P'' را به فاصلهٔ یك کنارچپ کاغذ رسم کنید .

۷ ـ هر یك از این دو صفحهٔ P' و P'' چهار یال از شکل EABCDF را قطع می‌کند؛ ملخص و رقوم این ۸ نقطهٔ تقاطع راتعیین و قسمتی از شکل نامبرده را که مابین این دو صفحه قرار دارد، نمایش داده و با فرض کدر بودن آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۰)

۱۸ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم‌کنید ؛محل‌تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحدسانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱ـ نقطهٔ a_1 را منطبق بر مرکز کاغذ انتخاب کرده و به همان مرکز و شعاع $4\sqrt{2}$ دایره‌ای رسم‌کنید که محور اطول را زیر مرکز کاغذ درنقطهٔ e_5 تلاقی کند؛محیط دایرهٔ نامبرده را شروع از نقطهٔ e_5 سه قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را از همین نقطه در جهت مثلثاتی مرتباً e_5 و b_5 و d_5 بنامید .

۲ـ طول $AE = AB = AD$ را حساب کنید .

۳ ـ به قاعدهٔ تسطیح،ویا محاسبه، ثابت‌کنید که $\widehat{BAD} = 90^\circ$ است.

۴ـ ثابت کنید که خط AE بر صفحهٔ BAD عمود و کنج سه‌وجهی $(A-EBD)$ سه قائمه است .

۵ ـ روی مثلث BAD مربع ABCD را که BD یکی از اقطار آن‌است،بنا کرده و ملخص $a_1b_5cd_5$ این مربع را رسم و رقوم نقطهٔ c را تعیین کنید .

۶ ـ مربع ABCD را قاعده قرار داده و روی آن مکعبی بنا کنید بقسمی‌که AE یکی دیگر از یالهای آن باشد ؛ ملخص‌آن را رسم و رقومهای

بقیهٔ رئوس آن را تعیین و چنانکه سطح این مکعب کدر باشد ،خطوط‌مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

۷ـ بر وسط قطری از مکعب نامبرده که بالاترین رأس آن را به‌پایین‌ترین رأس وصل می‌کند،صفحه‌ای عمود بر همین قطر مرور داده و مقطع این صفحه را در مکعب رسم کنید .

۸ـ وسعت این مقطع را حساب کنید .

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۱)

۱۹ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید ؛ واحد سانتیمترو مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱ـ نقطهٔ a_0 را منطبق بر مرکز کاغذ و نقطهٔ s_7 را روی محوراطول در فاصلهٔ ۴ پایین مرکزکاغذ انتخاب کنید ؛ به مرکزs و شعاع sa دایره‌ای رسم کرده محیط آن را از نقطهٔ a_0 به شش قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را در جهت مثلثاتی مرتباً a_0 ، b_0 ، c_0 ، d_0 ، e_0 ، f_0 بنامید ، سپس ملخص هرم منتظم مسدس‌القاعدهٔ $s_7a_0b_0c_0d_0e_0f_0$ را رسم کنید .

۲ـ طول Sa را به‌وسیلهٔ تسطیح و یا محاسبه پیدا کنید .

۳ـ یك مقیاس شیب از صفحهٔ $s_7b_0c_0$ را رسم کرده و شیب این صفحه را معلوم کنید .

۴ـ فصل مشترك دو صفحهٔ $s_7b_0c_0$ و $s_7d_0c_0$ را رسم و زاویهٔ حقیقی این فصل مشترك را با خط بزرگترین شیب صفحهٔ $s_7c_0d_0$ به وسیلهٔ تسطیح پیدا کنید .

۵ ـ عمود مشترك دوخط متنافر s_7a_0 و c_0e_0 را رسم و فاصلهٔ حقیقی این دوخط متنافر را به‌وسیلهٔ تسطیح و محاسبه پیدا کنید .

۶ ـ مثلث $s_7a_0b_0$ را در حول اثر a_0b_0 صفحهٔ آن طرف خارج شکل در S_1ab تسطیح کنید .

۷ـ اکنون فرض می‌کنیم مثلث S_1ab یك وجه جانبی ازهرم منتظم‌فوق

بر صفحهٔ مقایسه قرارگرفته و بالعکس شش‌ضلعی‌منتظم abcdef تسطیح قاعدهٔ آن در حول همان لولای a_0b_0 قبلی باشد ؛ بافرض جدید، قاعدهٔ نامبرده و رقومهای چهار رأس دیگر آن را با $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین و ملخص هرم را در وضع جدید رسم و چنانچه سطح آن‌کدر باشد، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

(خرداد ۱۳۴۱ دبیرستانهای کشور)

۲۰- محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم‌کنید ؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱- اثر صفحهٔ P بر محور اقصر کاغذ منطبق است؛ زاویهٔ این صفحه با صفحهٔ مقایسه ۴۵ درجه و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از بالا به پایین کاغذ است؛ یك مقیاس شیب از این صفحه را در فاصلهٔ یك کنار چپ کاغذ رسم کرده نقطهٔ a_0 را روی اثر صفحه درفاصلهٔ ۴ راست مرکز کاغذ انتخاب‌کنید.

۲- از نقطهٔ a_0 در صفحهٔ P پاره‌خط a_0b_3 را طوری رسم کنید که زاویهٔ حقیقی آن با اثر صفحهٔ مزبور، °۳۰ بوده و بعلاوه b سمت چپ محور اطول کاغذ باشد .

۳- از نقطهٔ a_0 مجدداً در صفحهٔ P پاره‌خط دیگر a_0d_2 را بقسمی بگیرید که خط aB برخط aD عمود باشد .

۴- ملخص مستطیل، aBcD را که BD قطر آن است ، رسم ورقوم C رأس چهارم آن،را تعیین کنید .

۵- روی این مستطیل ، متوازی‌السطوحی بنا کنید به این ترتیب که از رئوس آن ، افقیه‌هایی‌که تصاویر آنها موازی محوراطول کاغذ باشد مرور داده و روی هرکدام از آنها شروع از رئوس مستطیل به سمت بالای کاغذ طول ۱۰ واحد جدا کرده و نقاط حاصل را متوالیاً به هم وصل کنید تا قاعدهٔ دیگرمتوازی‌السطوح بدست آید ؛ ملخص این متوازی‌السطوح را رسم و با کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

۶- صفحهٔ دیگر P' را که اثر آن نیز بر محور اقصر کاغذ منطبق بوده و زاویهٔ آن با صفحهٔ مقایسه همان ۴۵ درجه منتهی درخلاف جهت زاویهٔ صفحهٔ P با صفحهٔ مقایسه باشد ،در نظر می‌گیریم؛ یك مقیاس شیب از این صفحهٔ P' را در فاصلهٔ یك کنار راست کاغذ رسم کنید .

۷- نقاط تلاقی صفحهٔ اخیر P' را با چهار یال افقی متوازی‌السطوح مذکور تعیین کرده وآنها را بطور متوالی به یکدیگر وصل کنید تا یك‌چهار‌ضلعی بدست آید .

(شهریور ۱۳۴۱ دبیرستانهای کشور)

۲۱- محورهای اطول و اقصر کاغذرا رسم‌کنید ؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمتر است ومقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱- پاره‌خط a_0b_6 را بقسمی‌که $ab=6\sqrt{2}$ باشد ، روی‌محور اقصر طوری بگیرید که b بر مرکز کاغذ منطبق بوده و a سمت چپ آن باشد .

۲- از نقطهٔ b_6 نیم‌خطی چنان رسم کنیدکه تصویر آن با قسمت راست محور اقصر و در بالای آن زاویهٔ ۶۰ درجه تشکیل دهد؛ روی این نیم‌خط نقطهٔ c_0 را طوری بگیرید که خط aB بر cB عمود باشد .

۳- اضلاع مثلث aBc و شیب صفحهٔ این مثلث را حساب کنید .

۴- بر ضلع a_0c_0 این مثلث،صفحهٔ P را طوری مرور دهیدکه زاویهٔ آن باصفحهٔ مقایسه برابر زاویهٔ مثلث نامبرده باصفحهٔ مقایسه منتهی درخلاف جهت آن باشد ؛ یك مقیاس شیب از این صفحه را باختیار رسم کنید .

۵- از نقطهٔ b_6 عمودی بر صفحهٔ P فرود آورده پای عمود و رقوم آن را تا $\frac{1}{10}$ تقریب از روی شکل تعیین کنید .

۶- روی صفحهٔ P نقطهٔ s_{12} را طوری بگیرید که Sa=Sc باشد و ملخص هرم SBac را رسم کنید .

۷- روی یالهای‌هرم نامبرده ، نقاط به‌رقوم ۶ را به‌یکدیگر وصل‌کرده

و در نمایش نهایی ، قسمتی از هرم را که مابین صفحهٔ افقی به رقوم ۶ و صفحهٔ مثلث aBc محصوراست،نشان بدهید وچنانچه صفحهٔ افقی‌مزبور حاکی ماورا و سطح هرم‌کدر باشد، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۱)

۲۲ـ محور اطول‌کاغذ را رسم کنید؛واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است .

۱ـ پاره‌خط $a_۰b_۰=۱۰$ را موازی کنار پایین کاغذ و به فاصلهٔ ۶ از آن،طوری رسم کنید که a به فاصلهٔ پنج طرف چپ محور اطول کاغذ و b به فاصلهٔ پنج طرف راست محور اطول کاغذ باشد ؛ ازنقطهٔ $b_۰$ پاره‌خط $b_۰c_۳$ را به شیب $\frac{۳}{۴}$ زیر $a_۰b_۰$ بقسمی رسم کنیدکه زاویهٔ حقیقی آن با $a_۰b_۰$ ۶۰ درجه باشد(یعنی $\widehat{abC}=۶۰^\circ$) ؛ سپس‌نقطهٔ $d_۳$ راکه تصویر آن؛قرینهٔ c نسبت به محور اطول کاغذ است ، درنظر گرفته ملخص چهارضلعی $a_۰b_۰c_۳d_۳$ را تکمیل و شیب صفحهٔ آن را حساب کنید .

۲ـ این چهارضلعی را حول $a_۰b_۰$ تسطیح کرده و ثابت کنید که : $aD=DC=Cb=۵$ و aD بر bD عمود است .

۳ ـ ملخص نقطهٔ S را بقسمی تعیین کنید که $Sa=Sb$ بوده و SC افقیه و Sb بر bC عمود باشد .

۴ـ فصل مشترك دو صفحهٔ $s_۳c_۳b_۰$ و $s_۳d_۳a_۰$ را رسم و عمود مشترك این فصل مشترك و خط $a_۰b_۰$ را که نسبت به هم متنافر هستند،تعیین کنید .

۵ ـ مقدار حقیقی زاویهٔ مسطحهٔ فرجه‌ای ازهرم $s_۳a_۰b_۰c_۳d_۳$ را که یال آن فرجه پاره‌خط $a_۰b_۰$ است ، رسم کنید .

۶ ـ صفحهٔ نیمساز فرجهٔ نامبرده و همچنین صفحه‌ای را که بر یال $a_۰b_۰$ گذشته و بر صفحهٔ $a_۰b_۰s_۳$ عمود باشد ، در نظر می‌گیریم،هرکدام از آنها چهار یال ازهرم فوق‌الذکر را قطع می‌کند ؛ ملخص‌نقاط تقاطع راتعیین و قسمتی از هرم را که مابین این دو صفحه قرار دارد،حذف کرده باقیمانده

را نمایش دهید ؛ بالاخره قسمت حذف شده رادریك ملخص جداگانه نشان داده خطوط مرئی را از مخفی تمیز دهید ؛ سطح هرم ، کدرفرض شده است .

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۲)

۲۳ـ محورهای‌اقصر و اطول‌کاغذ را رسم‌کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ، واحد سانتیمترو مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است .

۱ـ اثر صفحهٔ P برمحور اقصر کاغذ منطبق بوده زاویهٔ آن با صفحهٔ مقایسه ۳۰ درجه و ترقی رقومهای مقیاس شیب صفحه از بالا به پایین‌است؛یك مقیاس شیب از این صفحه را باختیار رسم کنید .

۲ـ نقاط $a_۱$ و $c_۵$ از صفحهٔ P را که تصاویر آنها برمحور اطول کاغذ قراردارد ، انتخاب کرده و مربع ABCD به قطر AC واقع بر صفحهٔ P را در نظرگرفته ملخص آن را رسم و رقومهای دورأس b و d راتعیین‌کنید؛ b سمت چپ و d سمت راست محور اطول است .

۳ـ پاره‌خط $a_۱s_{۱۰}$ را طوری رسم کنید که تصویر آن ، محور اقصر کاغذ را در فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ راست مرکز کاغذ قطع کرده و بعلاوه AS بر AC عمود باشد .

۴ ـ ملخص هرم SABCD را رسم و با فرض کدر بودن‌سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز دهید .

۵ ـ از رأس $s_{۱۰}$ هرم فوق، عمودی برقاعده‌فرود آورده و پای عمود و رقوم آن را تعیین کنید .

۶ ـ مقدار حقیقی زاویهٔ $b_۳s_{۱۰}d_۳$ را به وسیلهٔ تسطیح نشان دهید .

(دبیرستانهای تهران خرداد ۱۳۴۲)

۲۴ـ محور اقصر کاغذ را رسم‌کنید؛وسط آن مرکز کاغذ ، واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است .

۱ــ مثلث $a_0b_0c_0$ واقع بر صفحهٔ مقایسه را به اضلاع $ab=۸$ و $ac=۸\sqrt{۲}$ و $bc=۸\sqrt{۳}$ طوری رسم کنید که ضلع bc منطبق برمحور اقصرکاغذ بوده و b به فاصلهٔ $۴\sqrt{۳}$ سمت چپ مرکزکاغذ و c به فاصلهٔ $۴\sqrt{۳}$ سمت راست مرکزکاغذ و a بالای محوراقصرکاغذ قرار بگیرد؛همچنین نقطهٔ s_4 را که تصویر آن بر مرکزکاغذ منطبق است،اختیار کنید؛هرم $Sabc$را در نظرمی‌گیریم ؛ ابتدا ثابت کنید که مثلث abc قائم‌الزاویه است .

۲ــ ثابت کنید طولهای $Sa=Sb=Sc=۸$ است .

۳ ــ با استفاده از تسطیح، ثابت کنید که زوایای $cSa = ۹۰°$ و $bSc = ۱۲۰°$ و $bSa = ۶۰°$ است .

۴ــ از نقطهٔ b_0 عمودی بر صفحهٔ $s_4a_0c_0$ فرود آورده پای عمود و رقوم آن و فاصلهٔ حقیقی نقطه را تا صفحه تعیین کنید .

۵ــ بر یال b_0c_0 هرم فوق،صفحهٔ P را طوری مرور دهیدکه باصفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل داده و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن، بالای کاغذ باشد ؛ یك مقیاس شیب از این صفحهٔ P را باختیار رسم کنید .

۶ــ فرض می‌کنیم مثلث abc تسطیح مثلث αb_0c_0 از صفحهٔ P حول لولای b_0c_0 باشد ؛ α ورقوم آن را تا $\frac{۱}{۱۰}$ تقریب تعیین‌کنید در صورتی‌که می‌دانیم‌این نقطه بالای صفحهٔ مقایسه قرار گرفته است .

۷ــ دراین‌ترفیع،رأس s_4 هرم $s_4a_0b_0c_0$ که صلب فرض می‌شود ، وضع‌جدیدی‌پیدا می‌کند؛ تصویر ورقوم جدید آن را تا $\frac{۱}{۱۰}$ تقریب تعیین و ملخص هرم را در وضع جدید رسم کنید و چنانچه سطح آن کدرباشد، خطوط مرئی و مخفی این ملخص را از یکدیگر تمیز دهید .

(خرداد ۱۳۴۲ شهرستانها)

۴۵ــ محور اطول کاغذ را رسم کنید؛واحد سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ است.

۱ــ اثر صفحهٔ P را به فاصلهٔ ۶ ازکنار تحتانی کاغذ و به موازات‌آن رسم‌کنید؛ اساس این صفحه، یك و ترقی رقومهای مقیاس شیب آن از بالا به پایین است . ملخص ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $a_0b_0c_4d_4$ را که بر صفحهٔ P واقع است، به این ترتیب رسم کنید: قاعدهٔ $a_0b_0=۸$ بر اثرصفحه بطوری که a_0 در فاصلهٔ ۴ راست محور اطول کاغذ و b_0 در فاصلهٔ ۴ چپ همان محور و طول قاعدهٔ دیگر $cd=۴$ و c سمت چپ محور اطول و d سمت راست آن واقع است .

۲ــ این‌ذوزنقه راحول اثر صفحهٔ P تسطیح می‌کنیم؛ ثابت‌کنید ذوزنقهٔ تسطیح شدهٔ $abCD$ قابل محیط شدن بر یك دایره است؛ شعاع‌دایرهٔ محاطی آن و طول ساق aD و همچنین طول تصویرش ad را حساب کنید .

۳ــ نقطهٔ o_2 از صفحهٔ P را که تصویرآن برمحور اطول قرار دارد، درنظرمی‌گیریم؛ ثابت کنید مقدار حقیقی زاویهٔ $a_0o_2d_4=۹۰$ درجه است.

۴ ــ ذوزنقهٔ $a_0b_0c_4\,d_4$ قاعدهٔ تحتانی منشور قائمی است واقع در بالای صفحهٔ P بقسمی که طول حقیقی یال جانبی آن مساوی ۲/۵ برابر قطر دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ $abCD$ است ؛ رقومهای چهار رأس فوقانی این منشور قائم را تعیین و ملخص آن را رسم کنید .

۵ ــ صفحهٔ افقی به رقوم چهار ، یالهای جانبی منشور فوق را قطع می‌کند؛ ملخص نقاط تقاطع را تعیین و بطور متوالی به‌هم وصل کنید تا یك چهارضلعی بدست آید .

۶ ــ در ملخص نهایی و جدا گانه قسمتی از منشور فوق را که مابین صفحهٔ ذوزنقه $a_0b_0c_4\,d_4$ و صفحهٔ افقی به رقوم‌چهارقرار دارد، نشان داده وچنانچه سطح منشور،کدر و صفحهٔ افقی نامبرده، حاکی ماورا باشد، خطوط مرئی را از مخفی تمیز دهید .

(شهریور ۱۳۴۲ دبیرستانها)

۴۶ــ محورهای اطول و اقصرکاغذ را رسم‌کنید؛ محل تلاقی آنهامرکز کاغذ ، واحد ، سانتیمتر و مقیاس $\frac{۱}{۱}$ می‌باشد .

۱ـ مربع $a_0b_0c_0d_0$ به ضلع ۶ واقع بر صفحهٔ مقایسه را طوری رسم کنیدکه مرکز آن، بر مرکز کاغذ منطبق و اضلاع آن، موازی محورهای کاغذ باشد؛این مربع، قاعدهٔ تحتانی مکعبی استکه قاعدهٔ فوقانی آن، مربع‌دیگر $e_6f_6g_6h_6$ است؛ e بر a منطبق و در ربع اول محورهای‌کاغذ بوده وتصاویر بقیهٔ رئوس وجوه بالا و پایین، بترتیب در جهت مثلثاتی و مستقیم دوبدو بر همدیگر منطبقند .

۲ـ رأس e_6 از وجه فوقانی این مکعب را به مرکز وجه پایین وصل و همچنین قطر e_6c_0 مکعب را رسم می‌کنیم؛زاویهٔ حادهٔ حقیقی ما بین این دو خط را به وسیلهٔ تسطیح پیدا کنید و اگر این زاویه را θ بنامیم،ثابت‌کنید $\sin\theta = \frac{1}{3}$ است .

۳ـ عمود مشترك قطر b_0d_0 وجه پایین و قطر e_6c_0 مکعب را پیدا کنید .

۴ـ ازرأس h_6 وجه فوقانی صفحهٔ P را باشیب ۲ طوری مرور دهید که اثر آن از c_0 گذشته و محور اقصر کاغذ را طرف چپ مرکز تلاقی کند؛ یك مقیاس شیب از این صفحهٔ P را باختیار رسم کنید .

۵ ـ فرض می‌کنیم مربع abcd تسطیح چهارضلعی رقوم‌دار $\alpha\beta c_0\Delta$ از صفحهٔ P حول اثر این صفحه باشد ؛رقومهای سه رأس Δ و β و α را که‌مثبت فرض می‌شوند ،تا $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین و ملخص این چهارضلعی را رسم کنید .

۶ـ مکعب فوق را که صلب فرض می‌شود، پس از این ترفیع، مجدداً نمایش داده رقومهای سایر رئوس آن را تا $\frac{1}{10}$ تقریب تعیین و ملخص‌جدید آن را رسم‌کنید و با فرض‌کدربودن سطح‌آن، خطوط مرئی را از مخفی تمیز بدهید .

(شهریور ۱۳۴۲ متفرقه)

۲۷ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم‌کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ ، واحد ، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱ـ نقطهٔ a_0 را منطبق بر مرکز کاغذ و نقطهٔ c_0 را روی محور اقصر سمت راست مرکز طوری بگیرید که $ac=6$ باشد ؛ مثلث acB واقع است بر صفحهٔ‌قائمی که اثر آن ، ac ، بر محور اقصر کاغذ می‌گذرد؛ در این مثلث، طول ضلع $aB=3\sqrt{2}$ و زاویهٔ $caB=135$ درجه است ؛ با استفاده از تسطیح، ملخص این مثلث را رسم و رقوم رأس B را تعیین‌کنید در صورتی‌که می‌دانیم این نقطه بالای صفحهٔ مقایسه قرار دارد .

۲ـ طول ضلع Bc و شیب آن را حساب کنید .

۳ ـ هرم فضایـی DBac را بقسمی بنا کنید که یالهای $Da=DB=Dc$ بوده و زاویهٔ $acD=75^\circ$ باشد؛ با استفاده از تسطیح مجدد (یا به طریق دیگر)، ارتفاع این‌هرم را که از رأس D خارج‌می‌شود، رسم کنید .

۴ ـ ملخص هرم فوق را رسم و رقوم رأس D را دقیقاً معین کنید ؛ d بالای محور اقصر است .

۵ ـ اگر وجه aBD از هرم فوق ، یك قاعده از منشور مایلی فرض شودکه پاره‌خط cD یال جانبی‌آن باشد، ملخص مرقوم این منشور راتکمیل و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی را ازمخفی تمیز بدهید؛ صفحهٔ مقایسه ، حاکی ماورا فرض می‌شود .

۶ ـ تصویر و رقوم مرکز ثقل این منشور را پیدا کنید .

تبصره ـ مرکزثقل منشور، وسط خط واصل بین محل‌تلاقی میانه‌های دو قاعده می‌باشد .

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۳)

۲۸ـ محور اطول و اقصر کاغذ را رسم‌کنید؛ محل تلاقی آنها مرکز کاغذ ، واحد ، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است :

۱- پاره‌خط a_9b را بقسمی اختیار کنید که $ab=$ ۶ و موازی محور اقصر کاغذ، a در فاصلهٔ ۳ زیر محور اقصر و در فاصلهٔ ۳ راست محور اطول و b سمت چپ a و رقوم آن از رقوم a کمتر و بعلاوه طول $AB=$ ۱۰ باشد؛ رقوم b را تعیین‌کنید.

۲- از نقطهٔ B افقیهٔ BC را طوری مرور می‌دهیم که تصویر آن از مرکز کاغذ بگذرد و شیب خط AC برابر واحد ودر تصویر، c بالای محور اقصر باشد؛ ملخص مثلث ABC را رسم و شیب صفحهٔ آن را تعیین کنید.

۳- طولهای AC و BC را حساب کنید.

۴- مثلث $a_9b_1c_1$ را حول افقیهٔ b_1c_1 تسطیح کنید.

۵- هرم $SABC$ را در نظر می‌گیریم که در آن، رأس S بالاتر از صفحهٔ قاعده قرار دارد و یالهای $SA = SB = SC$ بوده و بعلاوه $\widehat{CSB}=$ ۹۰ درجه باشد؛ ازتسطیح فوق استفاده‌کرده با تسطیح مجدد (و یا به طریق دیگر)، ارتفاع این هرم را که ازرأس Sخارج می‌شود، ترسیم‌کنید.

۶- تصویر و رقوم رأس نامبرده را تا $\frac{1}{10}$ تقریب از روی‌شکل‌معلوم کرده ملخص هرم را رسم و با فرض کدر بودن‌سطح آن، خطوط مرئی را از مخفی جدا کنید.

(دبیرستانها خرداد ۱۳۴۳)

۲۹- واحد، سانتیمتر - مقیاس $\frac{1}{1}$.

۱- دو محور اطول و اقصرکاغذ را رسم کرده نقطهٔ برخورد آنها را ω بنامید؛روی محور اقصر،دو نقطهٔ b_6 و d_4 را در طرفین ω بقسمی اختیارکنید که d_4 سمت راست ω و به فاصلهٔ ۶/۴ و b_6 سمت چپ ω و به فاصلهٔ ۳/۶ از آن قرار گیرد.

۲- از d_4 خطی به شیب $\frac{1}{2}$ و از b_6 خطی به شیب ۱ چنان رسم کنید

که یکدیگر را روی صفحهٔ مقایسه قطع‌کنند و a_0 نقطهٔ تقاطع آنها بالای محور اقصر باشد (فقط حل این قسمت را شرح دهید).

تبصره - اگر نتوانستید فرض دوم را حل کنید، a_0 را روی محور اطول و به فاصلهٔ ۴/۸ از ω و بالای آن اختیار کنید و حل بقیهٔ مسئله را ادامه دهید.

۳- طولهای aB و aD را محاسبه کنید.

۴- مقدار حقیقی زاویهٔ BaD را با تسطیح بیابید.

۵- ملخص‌متوازی‌الاضلاع $aBCD$ را رسم و رقوم C رابدست‌آورید.

۶- قسمتی ازمحور اطول را که از a_0 به سوی بالا ممتد است، تصویر خطی عمود بر a_0d_4 فرض کرده و آن را تا نقطهٔ e_8 مدرج کنید.

۷- ملخص متوازی‌السطوحی را که قاعدهٔ آن $aBCD$ و یکی از یالهایش aE باشد، رسم و مرئی و مخفی آن را از هم تمیز دهید.

(دبیرستانها شهریور ۱۳۴۳)

۳۰- واحد، سانتیمتر ومقیاس $\frac{1}{1}$ است - دو محور اطول و اقصرکاغذ را رسم و محل‌تلاقی آنها را ω بنامید؛ روی محور اطول، دو نقطهٔ a_5 و b_1 را چنان اختیار کنید که a_5 زیرمحور اقصر و به فاصلهٔ ۳ از ω و b_1 بالای محور اقصر و به فاصلهٔ ۵ از ω واقع باشد.

۱- اگر محور اقصرکاغذرا افقیهٔ رقوم صفر فرض کنیم، عمود مشترك a_5b_1 و این افقیه را بیابید.

توضیح - قسمتهای بعدی مسئله به این فرض ارتباطی ندارد و اگر نتوانستید این فرض را حل‌کنید، مانعی برای ادامهٔ مسئله نیست.

۲- در نقطهٔ a_5 صفحه‌ای برخط a_5b_1 عمودکرده یك مقیاس شیب از این صفحه را در جای مناسب نقشه رسم‌کنید.

۳- روی محور اقصر و به فاصلهٔ ۴ از ω و سمت چپ‌آن، نقطهٔ α را اختیارکنید؛ اگر $a\alpha$ تصویر خطی عمود بر a_5b_1 باشد، این خط را مدرج

کرده و روی آن، نقطهٔ c_9 را بیابید.

۴ ـ اگر a_5b_1 و a_5c_9 دو یال از یك كنج سه‌قائمه باشند، ملخص یال سوم را یافته و آن را تا نقطهٔ d_9 مدرج کنید .

۵ ـ اگر $c_9d_9a_5$ قاعدهٔ منشوری باشد که یك یال آن a_5b_1 است، ملخص منشور را کامل کرده و مرئی و مخفی آن را از هم تمیز دهید .

(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۳)

۳۱ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید؛ واحد، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$.

۱ـ صفحهٔ P به شیب یك مفروض است؛ مقیاس شیب آن را در طرف چپ کاغذ موازی محور اطول با ترقی رقوم از بالا به پایین طوری رسم کنید که اثر صفحه، منطبق بر محور اقصر کاغذ بوده و در این صفحه، نقطهٔ a_0 را به فاصلهٔ ۳ سمت راست مرکز کاغذ اختیار نموده از این نقطه خط a_0c_4 را در صفحهٔ P طوری رسم کنید که تصویرش با اثر صفحه زاویهٔ ۳۰ درجه ساخته و نقطهٔ c_4 در طرف چپ محور اطول واقع شود .

۲ـ طول حقیقی خط a_0c_4 را حساب کنید .

۳ـ a_0c_4 قطر مستطیل ABCD واقع در صفحهٔ P است که رقوم رأس B آن مساوی ۳ و b طرف راست محور اطول است؛ ملخص مستطیل را رسم کنید .

۴ـ از نقطهٔ a_0 خطی به شیب $\frac{5}{3}$ رسم کنید که محور اطول را در نقطهٔ s_{10} بالای مرکز کاغذ تلاقی نماید و به وسیلهٔ رسم صفحهٔ عمود منصف a_0c_4 و یا به طریق محاسبه ثابت کنید SA با SC مساوی خواهد شد .

۵ـ منشور مایلی که یك قاعدهٔ آن، مستطیل ABCD و s_{10} مرکز قاعدهٔ فوقانی آن باشد، در نظر گرفته ملخص آن را رسم و با فرض کدر بودن سطح آن، خطوط مرئی و مخفی را مشخص نمایید .

(متفرقه شهریور ۱۳۴۴)

۳۲ـ محورهای اطول و اقصر کاغذ را رسم کنید ؛ واحد، سانتیمتر و مقیاس $\frac{1}{1}$ است .

۱ـ صفحهٔ P به شیب یك مفروض است؛ مقیاس شیب آن را در طرف چپ کاغذ با ترقی رقوم از پایین به بالا طوری رسم کنید که محور اقصر کاغذ، افقیهٔ رقوم یك آن باشد و در این صفحه نقطهٔ c_7 را روی محور اطول

کاغذ اختیار نموده خط c_7a_1 را به شیب $\frac{3}{4}$ در این صفحه رسم کنید؛ نقطهٔ a_1 در طرف چپ محور اطول کاغذ است .

۲ـ ملخص مثلث متساوی‌الاضلاع ABD واقع در صفحهٔ P را طوری رسم کنید که یك رأسش a_1 و ملخص قطر دایرهٔ محیطی آن، a_1c_7 باشد؛ رقوم B از رقوم D کمتر است .

۳ـ صفحهٔ Q را به موازات صفحهٔ P طوری رسم کنید که محور اقصر کاغذ، افقیهٔ رقوم ۵ آن و مقیاس شیبش طرف راست کاغذ باشد؛ همچنین از نقطهٔ c_7 خطی به شیب یك بطوری که تصویرش با محور اقصر کاغذ موازی و ترقی رقومش از چپ به راست باشد، اختیار نموده و نقطهٔ برخورد این خط را با صفحهٔ Q تعیین و آن را F بنامید .

۴ـ ملخص منشوری که یك قاعده‌اش چهارضلعی ABCD و یك یالش BF باشد، رسم نموده و با فرض کدر بودن سطح منشور، خطوط مرئی و مخفی آن را مشخص کنید .

۵ ـ حجم این منشور را حساب کنید .

(متفرقه خرداد ۱۳۴۵)

مسائل ترسیمی امتحانات نهایی

۱ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ به مختصات ذیل: α سمت چپ کاغذ، $P\alpha$ زیر xy که با آن، زاویهٔ $45°$ می‌سازد؛ $\alpha Q'$ بالای xy و با آن زاویهٔ $30°$ می‌سازد. مطلوب است تصاویر مثلث ABC که روی صفحهٔ مذکور باشد : AB روی افقیهٔ به ارتفاع ۲ و AC روی جبهیهٔ به بعد ۳ و BC با خط‌الارض متعامد است و $AB = 7$ می‌باشد. مطلوب است تصاویر ارتفاعات مثلث ABC .

(خرداد ۱۳۳۷ متفرقه)

۲ـ ۱ ـ نقطهٔ aa' مفروض است؛ تصاویر قرینه های این نقطه را نسبت به صفحات تصویر و نیمساز فرجه‌ها تعیین کنید .

۲ـ از نقطهٔ مفروض aa' خطی موازی نیمرخ $cdc'd'$ رسم کنید .

۳ ـ فصل مشترك صفحهٔ مواجه PQ' را با صفحهٔ مواجهی که به‌خط‌

الارض می‌گذرد ، تعیین کنید (نقطهٔ aa' و خط‌الارض نمایش صفحه است) .

۴ ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ و $P_1\alpha$ اثر افقی صفحهٔ دیگر مفروض است و می‌دانیم این دو صفحه برهم عمودند؛ اثر قائم این صفحه را تعیین کنید .

(خرداد ۱۳۳۷ تهران)

۳ـ ۱ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض است؛ بر آن، صفحهٔ مواجهی بگذرانید و آثارش را تعیین کنید .

۲ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ و نقطهٔ aa' خارج آن مفروض است ؛ از این نقطه صفحه‌ای به موازات $P\alpha Q'$ رسم کرده آثارش را تعیین کنید .

۳ـ فصل مشترک دو صفحهٔ $P\alpha Q'$ و $P_1\alpha Q'_1$ را که هر دو از نقطهٔ α از خط‌الارض گذشته‌اند ، تعیین کنید .

۴ـ بر خط مفروض $aba'b'$ صفحه‌ای بگذرانید که عمود بر صفحهٔ منصف فرجهٔ ناحیهٔ اول باشد .

(تهران شهریور ۱۳۳۷)

۴ـ ۱ـ تصویر افقی خطی و تصویر قائم یك نقطهٔ آن داده شده است ؛ تصویر قائم خط را پیدا کنید در صورتی که با صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ موازی باشد .

۲ـ از نقطهٔ aa' دو خط متقاطع dd' و DD' را به موازات صفحهٔ نیمسازفرجهٔ دوم رسم کنید؛ آثار این صفحه را بدست آورید و از نقطهٔ مفروض bb' واقع در ربع دوم ، خطی بر صفحهٔ مذکور عمود کنید .

۳ـ صفحه‌ای از نقطهٔ مفروض mm' وخطزمین می‌گذرد؛ محل برخورد آن را با خط مفروض dd' پیدا کنید .

۴ـ خط dd' ، بزرگترین شیب یك صفحه نسبت به صفحهٔ افق تصویر وخط DD'، بزرگترین شیب صفحهٔ‌دیگر نسبت به صفحهٔ‌قائم تصویر ،مفروضند؛ فصل مشترك دو صفحه را پیدا کنید .

(خرداد ۱۳۳۸ تهران)

۵ـ ۱ـ بر دو نقطهٔ aa' و bb' دو خط به موازات یکدیگر طوری مرور دهید که خط واصل بین آثار افقی آنها موازی امتداد مفروض d باشد.

۲ـ آثار صفحه‌ای راکه‌بر نقطهٔ مفروض و نیمرخ مفروض مرور کرده است، رسم کنید .

۳ـ ازنقطهٔ مفروض، خطی به موازات صفحهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم طوری رسم کنید که منتصب مفروضی را قطع کند .

۴ـ از نقطهٔ تقاطع خط Δ با صفحهٔ مفروض P ، خطی درصفحهٔ P چنان مرور دهید که بر خط Δ عمود باشد .

(متفرقه خرداد ۱۳۳۸)

۶ـ ۱ ـ آثار صفحه‌ای را رسم کنید که از نقطهٔ aa' بگذرد ، با خط dd' موازی باشد و بر صفحهٔ نیمرخ $P\alpha Q'$ عمود شود .

۲ـ aa' و bb' تصاویر دو رأس و c و d تصاویر افقی دو رأس دیگر از مستطیل $ABCD$ مفروضند؛ c' و d' را معین کنید .

۳ ـ نیمرخ $aba'b'$ را در ربع دوم رسم کنید و بر آن، صفحه‌ای مرور دهید که زاویهٔ بین آثارش در تصویر، مقدار معلوم α باشد .

۴ـ از نقطهٔ aa' واقع در خارج صفحهٔ $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$، قطعه‌خط افقی متکی به دوصفحهٔ مذکور چنان رسم‌کنیدکه در این نقطه به نسبت $\frac{۱}{۳}$ تقسیم شود .

(شهریور ۱۳۳۸ تهران)

۷ـ ۱ـ از نقطهٔ O واقع دریك صفحهٔ منتصب، خطی در این صفحه طوری رسم کنید که با صفحهٔ دیگرکه به وسیلهٔ دو خط موازی نمایش داده شده است ، موازی شود .

۲ـ از نقطهٔ O خطی عمود بر خط مفروض dd' و موازی با صفحهٔ منتصب Q مرور دهید .

۳ـ فصل مشترك صفحهٔ نیمرخ مفروض را با صفحه‌ای مار بر خط‌الارض پیدا کنید .

۴ـ مطلوب است تعیین آثار صفحه‌ی مار بر خط‌الارض و موازی با نیمرخ مفروض .

(متفرقه شهریور ۱۳۳۸)

۸ـ ۱ـ خط AA' را چنان رسم کنید که دو تصویرش در یك نقطه xy را قطع کنند و سپس خط BB' را بقسمی اختیارکنید که B'بر A و B

بر A' منطبق باشد و آثار صفحه‌ای که از دو خط AA' و BB' تشکیل می‌شود، تعیین کنید .

۲ـ خط DD' را در صفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول رسم کنید و از نقطهٔ aa' واقع در صفحهٔ نیمساز فرجهٔ اول صفحهٔ $P\alpha Q'$ را بر خط DD' عمود کنید و موقع عمود را معین کنید .

۳ـ صفحهٔ مواجه PQ' را چنان رسم کنید که Q' به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر از xy در بالای آن و P به فاصلهٔ یك سانتیمتر در زیر xy واقع شود و سپس صفحهٔ مواجه RS' را بقسمی رسم کنید که S' بر P و R بر Q' منطبق باشد . فصل مشترك دو صفحهٔ مواجه PQ' و RS' را معین کنید .

(خرداد ۱۳۳۹ تهران)

۹ـ ۱ـ فصل مشترك خط نیمرخ $aba'b'$ را با صفحات نیمساز اول و دوم پیدا کنید .

۲ـ دو خط متنافر که یکی افقیهٔ hh' و دیگری جبههٔ FF' است ، مفروضند؛ عمود مشترك این دو خط را رسم کنید .

۳ـ صفحهٔ غیرمشخص $P\alpha Q'$ و نقطهٔ aa' روی خط‌الارض مفروضند؛ قرینهٔ نقطهٔ aa' را نسبت به صفحهٔ $P\alpha Q'$ پیدا کنید .

۴ـ خطی چنان رسم کنید که با صفحهٔ $P\alpha Q'$ موازی بوده و ازنقطهٔ aa' گذشته و خط‌الارض را قطع کند .

(متفرقه خرداد ۱۳۳۹)

۱۰ـ ۱ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ و خط DD' بزرگترین شیب صفحهٔ دیگری نسبت به صفحهٔ افق، مفروضند؛ فصل مشترك دو صفحه را پیدا کنید .

۲ـ متوازی‌الاضلاع $abcd$ تصویر افقی لوزی $ABCD$ مفروض است؛ a' و c' تصاویر قائم دو رأس A و C نیز معین است؛ b' و d' تصاویر قائم B و D را بدست آورید .

۳ـ دو نیمرخ $aba'b'$ و $cdc'd'$ را بامعلومات زیررسم کنید: فاصلهٔ

رابطها ۳ و aa' به بعد ۳ و ارتفاع ۱ و bb' به بعد ۲ و ارتفاع ۳ و cc' به بعد ۴ و ارتفاع ۱ و dd' به بعد ۲ و ارتفاع ۲ ؛ سپس خطی رسم کنید که دو نیمرخ را قطع کند و با xy موازی باشد .

(شهریور ۱۳۳۹ تهران)

۱۱ـ ۱ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ مفروض است ؛ فصل مشترك آن را با صفحات نیمساز اول و دوم پیدا کنید .

۲ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ مفروض‌است؛ يك‌صفحهٔ دیگر به موازات‌آن، طوری مرور دهیدکه فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی، برابرواحدباشد و از دوجواب حاصل، فقط یکی را اختیار کنید .

۳ـ روی خط غیر مشخص dd' نقطه ای پیدا کنیدکه از دونقطهٔ aa' و bb' واقع بر خط نیمرخ مفروض، به یك فاصله باشد .

۴ـ ازنقطهٔ مفروض aa' خطی رسم کنید بقسمی‌که با خط مفروض dd' متعامد بوده و با صفحهٔ منتصب مفروض $P\alpha Q'$ موازی باشد .

(متفرقه شهریور ۱۳۳۹)

۱۲ـ ۱ـ در صفحهٔ $P\alpha Q'$ نقطهٔ aa' را اختیار کنید و از این نقطه خطی در صفحه رسم کنید که با صفحهٔ نیمساز دوم موازی باشد .

۲ـ فصل مشترك خط dd' را که در نیمساز دوم واقع است، باصفحهٔ $P\alpha Q'$ که آثارش در يك استقامتند، بدست آورید .

۳ـ عمود مشترك يك خط قائم و يك خط جبهی را که باهم متنافرند، رسم کنید .

۴ـ ازنقطهٔ oo' خطی برنیمرخ $aba'b'$ عمودکنید .

(تهران خرداد ۱۳۴۰)

۱۳ـ ۱ـ روی افقیهٔ مفروض وبه ارتفاع ۴ نقطهٔ mm' راطوری پیدا کنید که فاصلهٔ M از خط‌الارض برابر ۵ باشد .

۲ـ قرینهٔ نقطهٔ مفروض aa' را نسبت به خط مفروض dd' پیدا کنید.

۳ـ فاصلهٔ حقیقی نقطهٔ غیر مشخص aa' را از صفحهٔ نیمساز ناحیهٔ اول پیدا کنید .

۴ـ آثار افقی و قائم صفحهٔ $P\alpha Q'$ روی ملخص در امتداد همدیگر بوده و نقطهٔ aa' نیزکه دو تصویرش برهم‌منطبق است، برروی این اثرمشترك قرار دارد؛ از نقطهٔ aa' خطی رسم‌کنید که خطالارض را قطع‌کرده و باصفحهٔ $P\alpha Q'$ موازی باشد .

(متفرقه خرداد ۱۳۴۰)

۱۴ـ ۱ـ خط مواجهی رسم‌کنید که خط غیر مشخص dd' و خط $\Delta\Delta'$ را که در صفحهٔ نیمساز دوم واقع است ، قطع کند .

۲ـ فصل مشترك صفحهٔ مواجه PQ' را با خط dd' که در نیمساز اول واقع است ، معین‌کنید .

۳ـ بر نیمرخ $aba'b'$ صفحه‌ای بگذرانید که بر صفحهٔ $P\alpha Q'$ که آثارش بر یك استقامتند ، عمود باشد .

۴ـ صفحه‌ای از xy و نقطهٔ aa' می‌گذرد؛ قرینهٔ bb' را نسبت به این صفحه پیدا کنید .

(تهران شهریور ۱۳۴۰)

۱۵ـ ۱ـ نقطهٔ aa' را به ارتفاع ۳ و بعد ۶ اختیارکرده از این‌نقطه خطی به موازات صفحهٔ نیمساز اول رسم کنید که باصفحهٔ افق تصویر، زاویهٔ ۳۰ درجه تشکیل دهد .

۲ـ ازنقطهٔ مفروض aa' واقع درخارج صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$، افقیه‌ای چنان رسم کنید که صفحه را در نقطهٔ bb' قطع کند و طول $l = AB$ معلوم باشد .

۳ـ فصل مشترك خط نیمرخ مفروضی را با صفحهٔ مواجه مفروض پیدا کنید .

۴ـ آثار افقی و قائم دو صفحه دوبدو همدیگر را در حدود کاغذ تلاقی نمی‌کنند ؛ فصل مشترك این دو صفحه را پیدا کنید .

(متفرقه شهریور ۱۳۴۰)

۱۶ـ ۱ ـ بر نقطهٔ مفروض aa' خطی چنان مرور دهید که خط مفروض dd' را تلاقی کرده و برخط مفروض دیگر ll' عمود باشد .

۲ـ فصل مشترك خط نیمرخ مفروض $aba'b'$ را با صفحهٔ نیمساز اول پیدا کنید .

۳ـ تصاویر قائم d' و Δ' دو خط متنافر dd' و $\Delta\Delta'$ و تصاویر افقی و قائم عمود مشترك آنها معلوم است؛ تصاویر افقی آنها d و Δ را پیدا کنید.

۴ـ مقدارحقیقی فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی مفروض $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ را پیدا کنید .

(متفرقه ـ آبان ۱۳۴۰)

۱۷ـ ۱ـ از نقطهٔ مفروض aa' خط نیمرخی چنان مرور دهید که با صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ موازی باشد .

۲ـ خط نیمرخ $aba'b'$ مفروض است؛از نقطهٔ aa' آن، صفحه‌ای عمود بر این خط نیمرخ مرور داده و آثار آن را رسم کنید .

۳ـ فصل مشترك صفحهٔ مواجه PQ' را باصفحهٔ نیمساز دوم پیداکنید.

۴ـ آثار افقی و قائم صفحه‌ای در امتداد همدیگر قرار گرفته؛فاصلهٔ حقیقی یك نقطهٔ مفروض oo' واقع بر خطالارض تا این صفحه را پیدا کنید.

(متفرقه ـ اردیبهشت ۱۳۴۱)

۱۸ـ ۱ـ روی خط مفروض و غیرمشخص dd' نقطه‌ای پیدا کنید که ارتفاع‌آن، سه برابر بعد و یا بعد آن،سه برابر ارتفاع باشد؛ملخص هر دو حالت را رسم کنید .

۲ ـ صفحه‌ای تشکیل شده از خط نیمرخ $aba'b'$ و نقطهٔ خارجی mm' ؛آثار افقی وقائم این صفحه را رسم‌کنید .

۳ ـ ازنقطهٔ مفروض aa' خطی رسم‌کنیدکه خط مفروض dd' را قطع کرده و با صفحهٔ نیمساز اول موازی باشد .

۴ ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ که درآن، αP عمود بر $\alpha Q'$ و خطالارض نیمساز

زاویهٔ مابین آنها می‌باشد،مفروض‌است؛ نقطهٔ aa' را روی خط‌الارض به‌فاصلهٔ l ازنقطهٔ α داخل زاویهٔ مقعر $P\alpha Q'$ بگیرید؛فاصلهٔ حقیقی نقطه را تاصفحه ترسیم و مقدارآن را برحسب l حساب‌کنید .

(خرداد ۱۳۴۱ دبیرستانهای‌کشور)

۱۹ ـ ۱ ـ عمود مشترك نیمرخ مفروض $aba'b'$ و خط الارض را تعیین‌کنید .

۲ ـ صفحهٔ مواجه PQ' مفروض است؛ارتفاع Q' برابر ۳ و بعد P برابر ۲ است؛ نقطهٔ aa' روی این صفحه طوری انتخاب شده که a' بر روی Q' است ؛از این نقطه روی صفحهٔ مواجه خطی چنان رسم کنید که زاویهٔ‌آن با صفحهٔ افق تصویر، ۳۰ درجه باشد .

۳ ـ از یك صفحه ، خط غیر مشخص dd' و تصویر قائم D' خط بزرگترین شیب‌آن‌نسبت به صفحهٔ‌افق‌تصویر، معلوم است؛ آثار این صفحه را رسم‌کنید .

۴ ـ خط dd' که با خط‌الارض متقاطع می‌باشد، مفروض است؛ براین خط، صفحه‌ای چنان مرور دهید که در فضا خط D نیمساز زاویهٔ حادث بین دو اثر صفحه باشد وآثار صفحهٔ مطلوب را رسم‌کنید .

(دبیرستانهای‌کشور ـ شهریور ۱۳۴۱)

۲۰ ـ ۱ ـ از نقطهٔ مفروض aa' خط نیمرخی چنان رسم‌کنید که بر خط مفروض dd' عمود باشد .

۲ ـ برافقیهٔ مفروض hh' به ارتفاع ۳،صفحه‌ای مرور دهیدکه زاویهٔ آن با صفحهٔ افق تصویر، ۴۵ درجه باشد .

۳ ـ از نقطهٔ aa' واقع بر روی صفحهٔ $P\alpha Q'$ خطی به موازات صفحهٔ نیمساز اول رسم‌کنید .

۴ ـ αP ، اثر افقی صفحه‌ای وطول معلوم l ،فاصلهٔ حقیقی یك نقطهٔ

مفروض oo' واقع بر خط‌الارض تا این صفحه داده شده؛ اثر قائم صفحه را پیداکنید؛ بحث .

(متفرقه ـ آبان ۱۳۴۱)

۲۱ـ ۱ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض است؛ ازنقطهٔ aa' نیمرخ دیگری رسم‌کنیدکه باآن، زاویهٔ حقیقی ۶۰ درجه تشکیل دهد .

۲ـ خط غیر مشخص dd' داده شده؛ قرینهٔ‌آن را نسبت به‌صفحهٔ‌نیمساز اول پیداکنید .

۳ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ داده شده؛ برخط‌الارض، صفحه‌ای بگذرانید که بر آن صفحه عمود باشد؛ سپس فصل مشترك دو صفحه را پیداکنید .

۴ ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ مفروض است؛ صفحه‌ای چنان تعیین‌کنیدکه جمیع نقاط آن از دو اثر صفحهٔ نامبرده به یك فاصله باشد ؛ آثار این صفحه رانیز رسم‌کنید .

(متفرقه ـ اردیبهشت ۱۳۴۲)

۲۲ ـ ۱ ـ از یك لوزی ABCD به قطر AC تصاویر افقی a و b و c و d چهار رأس و تصاویر قائم a' و c' دو رأس‌آن داده‌شده؛ b' و d' را پیداکنید .

۲ ـ از نقطهٔ مفروض aa' صفحهٔ مواجهی طوری مرور دهیدکه زاویهٔ آن با صفحهٔ افق تصویر، دو برابر زاویهٔ آن با صفحهٔ قائم تصویر باشد .

۳ ـ قرینهٔ خط مفروض $\Delta\Delta'$ را نسبت به صفحهٔ نیمرخ مفروض، پیدا کنید .

۴ ـ دو خط متقاطع dd' و $\Delta\Delta'$ داده شده؛ ملخص نیمساز یکی از زوایای مابین این دو خط را رسم‌کنید .

(خرداد ۱۳۴۲ تهران)

۲۳ـ ۱ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض‌است؛ ازنقطهٔ cc' نیمرخ دیگری رسم‌کنیدکه بر نیمرخ اول عمود باشد.

۲ ـ قرینهٔ خط dd' را نسبت به صفحهٔ نیمساز دوم پیدا کنید .

۳ ـ از نقطهٔ مفروض aa' صفحهٔ مواجهی رسم‌کنید که با صفحات افق و قائم تصویر ،زوایای متساوی تشکیل داده وآثارآن را نیز رسم‌کنید .

۴ ـ نقاط aa' و bb' و c تصویر افقی نقطهٔ ثالثی داده شده‌اند ؛ تصویرقائم نقطه را پیداکنید درصورتی‌که می‌دانیم $\widehat{BAC}$ مساوی ۹۰° است.

(خرداد ۱۳۴۲ شهرستانها)

۲۴ ـ ۱ ـ فصل مشترك صفحهٔ $P\alpha Q'$ و $R\beta S'$ را در حالت کلی پیداکنید .

۲ ـ خط dd' بزرگترین شیب يك صفحه نسبت به صفحهٔ افق تصویر است ؛ آثار این صفحه را رسم‌کنید .

۳ ـ روی خط الارض، نقطه‌ای پیداکنید که فاصلهٔ حقیقی آن از افقیهٔ مفروض ، برابر طول معلوم l باشد و در مسئله بحث‌کنید .

۴ ـ قرینهٔ صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ را نسبت به صفحهٔ نیمساز اول پیدا وآثارآن را رسم‌کنید .

(شهریور ۱۳۴۲ تهران)

۲۵ ـ ۱ـ فصل مشترك خط مفروض dd' را باصفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ درحالت‌کلی پیدا کنید .

۲ ـ از نقطهٔ مفروض aa' به ارتفاع ۳ و بعد ۴ خطی رسم کنید که تصویر قائم آن با خط الارض زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل داده و زاویهٔ حقیقی این خط با صفحهٔ افق تصویر، ۳۰ درجه باشد؛ بحث .

۳ ـ در صفحهٔ نیمرخ مفروض ، پاره‌خط $aca'c'$ داده شده ؛ ملخص مربعی راکه این پاره‌خط،یکی‌از اقطارآن است ودر صفحهٔ نیمرخ قراردارد، رسم‌کنید .

۴ ـ قرینهٔ صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ را نسبت به صفحهٔ نیمساز دوم پیدا وآثارآن را تعیین‌کنید .

(متفرقه ـ شهریور ۱۳۴۲)

۲۶ـ ۱ـ روی خط مستقیم مفروض dd' نقطه‌ای پیداکنیدکه مجموع بعد و ارتفاع‌آن، ۲ باشد .

۲ ـ نیمرخ $aba'b'$ مفروض است ؛ از نقطهٔ cc' نیمرخ دیگری موازی‌آن رسم‌کرده وآثار صفحهٔ حاصل را ترسیم‌کنید .

۳ ـ تصویر افقی لوزی و تصویر قائم يك قطرآن داده شده ؛ ملخص لوزی را تکمیل‌کنید .

۴ـ از نقطهٔ مفروض aa' به ارتفاع ۲ و بعد ۳ خطی چنان رسم شده که زاویهٔ‌آن با صفحهٔ افق تصویر، ۴۵ درجه وزاویهٔ آن باصفحهٔ قائم‌تصویر، ۳۰ درجه است ؛ اگر نقطهٔ bb' اثر افقی این خط باشد ، قبلا طولهای ab و Ab و $a'b'$ را تعیین و سپس طرز رسم هندسی این خط را بیان‌کنید .

(متفرقه اردیبهشت ۱۳۴۳)

۲۷ـ ۱ـ ارتفاع نقطه‌ای از بعدآن، يك واحدبیشتراست؛ فاصلهٔ حقیقی آن تا خط زمین پنج است؛ ملخص نقطه را رسم‌کنید .

۲ ـ برخط مفروض dd' صفحه‌ای مرور دهیدکه‌آثارش برهم منطبق باشد. وضع هندسی این صفحه در فضا چگونه است ؟

۳ ـ از نقطهٔ مفروض aa' خط نیمرخی چنان رسم کنید که صفحهٔ مواجه مفروض را در نقطهٔ bb' قطع‌کند وطول $AB=l$ باشد؛ بحث‌کنید.

۴ ـ روی صفحهٔ مفروض $P\alpha Q'$ تصاویر افقی و قائم مکان هندسی نقاطی را رسم‌کنیدکه ارتفاع‌آنها دو برابر بعدشان باشد .

(دبیرستانها خرداد ۱۳۴۳)

۲۸ـ ۱ ـ افقیه‌ای رسم‌کنید که دو خط قائم و يك خط منتصب داده شده را قطع‌کند .

۲ ـ روی خط غیرمشخص و داده شدهٔ dd' نقطه‌ای بیابیدکه مجموع بعد و ارتفاعش مقدار معلوم l باشد .

۳ ـ خط غیر مشخصی رسم کنید که موازی صفحهٔ منصف‌الفرجهٔ اول باشد؛ برخورد این خط را با منصف‌الفرجهٔ ناحیهٔ دوم بیابید .

۴ ـ فصل مشترك يك صفحهٔ نيمرخ و يك صفحهٔ مواجه داده شده را يافته تسطيح كنيد .

۵ ـ عمود مشترك دو خط مفروض راكه يكى قائم و ديگرى غيرمشخص است، بيابيد .

۶ ـ در صفحهٔ غير مشخص و مفروض $P\alpha Q'$، از نقطهٔ دلخواه aa' خطى چنان رسم كنيد كه موازى صفحهٔ منصف الفرجهٔ ناحيهٔ دوم بوده و بر صفحهٔ $P\alpha Q'$ منطبق باشد .

(دبيرستانها شهريور ۱۳۴۳)

۲۹ ـ ۱ ـ نقطه‌اى به ارتفاع ۵ و بعد ۳ رسم كرده قرينهٔ اين نقطه را نسبت به صفحهٔ منصف‌الفرجهٔ دوم بيابيد .

۲ ـ فصل مشترك دو صفحهٔ مواجه و مفروض را فقط به يك طريق معين كنيد .

۳ ـ روى خط غير مشخص و مفروض $\delta\delta'$ نقطه‌اى بيابيدكه بعدش به اندازهٔ l بيش از ارتفاعش باشد .

۴ ـ از نقطهٔ مفروض aa' خطى عمود برصفحهٔ مفروض وغيرمشخص $P\alpha Q'$ رسم‌كرده پاى عمود را بيابيد .

۵ ـ ازصفحه‌اى يك افقيه و يك جبهيه مفروض است؛ آثار اين صفحه را بيابيد .

۶ ـ نقطهٔ بر خورد خط مفروض و غير مشخص $\delta\delta'$ را با صفحه‌اى كه برخط زمين‌گذشته و يك نقطهٔ aa' ازآن مفروض است ، معين‌كنيد .

(متفرقه آبان ماه ۱۳۴۳)

۳۰ـ ۱ـ ازنقطهٔ مفروض aa' خطى رسم‌كنيد كه خط مفروض DD' را تلاقى نموده و با صفحهٔ نيمساز فرجهٔ دوم موازى باشد .

۲ـ عمودمشترك خط نيمرخ $aba'b'$ را باخط مواجه $\Delta\Delta'$ رسم‌كنيد.

۳ـ صفحهٔ $P\alpha Q'$ آثارش بريك استقامت است؛ ازنقطهٔ مفروض bb' صفحه‌اى به موازات آن رسم‌كنيد .

۴ـ فصل مشترك خط مواجه DD' را با صفحهٔ غير مشخص $P\alpha Q'$ پيداكنيد .

۵ـ نقطهٔ bb' درصفحهٔ افق تصوير و خط dd' واقع درصفحهٔ نيمساز فرجهٔاول وسوم مفروضند؛ آثارصفحه‌اى‌راكه براين‌نقطه و اين‌خط مى‌گذرد، رسم‌كنيد .

(متفرقه ـ شهريور ۱۳۴۴)

۳۱ـ ۱ـ مجموع بعد و ارتفاع نقطهٔ A برابر ۴ و فاصلهٔ حقيقى آن تا خط‌الارض، برابر ۳ است؛ ملخص نقطه را رسم كنيد. از دوجواب، آن‌كه ارتفاع نقطه كمتر است، اختياركنيد .

۲ـ نقطهٔ aa' را به‌بعد ۵ وارتفاع ۲ اختيارنموده ازاين نقطه خطى به موازات صفحهٔ نيمساز فرجهٔ اول و سوم چنان رسم كنيد كه با صفحهٔ افق تصوير، زاويهٔ ۳۰ درجه بسازد (رسم يكى از دو جواب كافى است) .

۳ـ صفحهٔ مواجه PQ' مفروض است؛ بعد P مساوى ۴ و ارتفاع Q' مساوى ۳ است؛ تصوير افقى نقطهٔ mm' واقع درناحيهٔاول به‌بعد ۲ نيزمعلوم است ؛ فاصلهٔ حقيقى اين نقطه تاصفحه برابر ۲ مى‌باشد ؛ تصويرقائم آن را تعيين كنيد .

۴ـ نقطهٔ bb' را به بعد ۳ و ارتفاع ۲ و نقطهٔ cc' را به بعد ۶ و ارتفاع ۳ اختياركنيد بطورى‌كه فاصلهٔ رابطهاى اين دونقطه از هم برابر ۳ و bb' در طرف چپ cc' باشد ؛ مطلوب است رسم ملخص مثلث متساوى ـ الساقين ABC ($AB=AC$) بطورى‌كه قاعده اش $bcb'c'$ و رأس A روى خط‌الارض باشد .

۵ـ خط DD' را به موازات صفحهٔ نيمساز فرجهٔ دوم وچهارم و خط افقى HH' را متقاطع باآن اختيار نموده‌آثارصفحه‌اى را كه از اين دوخط مى‌گذرد، رسم نموده و فصل مشترك اين صفحه راباصفحهٔ نيمسازفرجهٔ دوم و چهارم تعيين‌كنيد .

(متفرقه ـ خرداد ۱۳۴۵)

پايان